

Das Uhrwerk der Fünf

Von der mathematischen Adresse zum akustischen Fingerabdruck



Christopher Bohn · BOHN AI Inc. · September 2026

Wissenschaftliche Zusammenfassung

Diese Arbeit untersucht zwei getrennte ganzzahlige Konstruktionen, die am selben geordneten Normpunkt $5^3=2^2+11^2$ enden, sobald ihre Voraussetzungen feststehen. Der Text folgt beiden als formal getrennten Wegen, beweist ihre Sätze und übersetzt die entstehende Raumstruktur danach in einen skalenfreien akustischen Fingerabdruck.

Der algebraische Weg beginnt beim klassischen Cohn-Paar $A(2)=Q^2$, $B(2)=C_2^2$ mit dem Produkt C_5 und dem Markov-Bruch $2/5$. Zwei symmetrische Vervollständigungen mit Determinante -1 wählen in der deklarierten Familie eindeutig $(p,q)=(2,5)$. Summe und additiver Kommutator erzeugen den orientierten Rahmen zur Gaußschen Zahl $2+i$; seine dritte Potenz liefert $(2+i)^3=2+11i$ und damit $5^3=2^2+11^2$.

Der geometrische Weg parametrisiert rechtwinklige Ganzzahldreiecke durch $d=m-k$ und $t=m+k$ und legt die symmetrische Quaderfamilie $(t-s,t,t+s)$ fest. Die beiden dimensionslosen Tore $A=V$ und $D^2=dh$ besitzen genau die nicht entartete positive Ganzzahllösung $(d,t,s)=(5,11,1)$. Daraus folgen $(m,k)=(8,3)$, das Dreieck $48:55:73$ und der Quader $10\times 11\times 12$. Erst danach werden beide Wege verglichen: Sie liefern getrennt dieselbe geordnete Adresse $(2,11)$.

Der aufsteigend geordnete Kofaktorvektor $K=(55,60,66)$ ist selbstdekodierend: Paardifferenzen und größte gemeinsame Teiler rekonstruieren 5, 6 und 11; die Kürzungen ergeben $5:6$, $10:11$ und $11:12$. Außerdem gilt $10981=55^2+60^2+66^2=61^3-60^3$. Das Tripel $(365, 10981, 1320)$ bestimmt die elementarsymmetrischen Kanteninvarianten und damit die Kanten 10, 11 und 12 bis auf Permutation.

Für das ideale Rechteckmodell M1 besitzt jede Eigenfrequenz die Form $f_n=v_0\sqrt{Q_n}$ mit genau einem spektralen Skalenfaktor $v_0=c/(2q)$. Die Primärstruktur umfasst den axialen Fingerabdruck $55:60:66$, die 221-Flächenmode und die 10981-Raummode sowie quadratische Schließungsrelationen. Das symbolische Newton-/Grant-System $5/4\rightarrow 63/50\rightarrow 432,081216$ wird davon ausdrücklich getrennt.

Die Anwendung auf Gizah bleibt ein Vergleichsmodell. Ein positiver physikalischer Befund verlangt nicht einen einzelnen Peak, sondern eine vorab festgelegte gemeinsame Signatur aus Frequenzverhältnissen, räumlichen Modenformen, Phase, Güte und Transferfunktion. Teil V formuliert die Messfrage knapp; das vollständige prospektive Design erscheint separat als Messprotokoll M1-M4, Version 1.0.1. Eine unabhängige Prioritäts-, mathematische und fachakustische Prüfung steht aus.

Das Uhrwerk in einem Satz. Zwei getrennte Rechenwege treffen bei $5^3=2^2+11^2$; daraus entstehen $48:55:73$, $10\times 11\times 12$ und der selbstdekodierende Akkord $55:60:66$. Ein einziger Regler setzt das dimensionslose Muster in Hertz, und der reale Stein bleibt die offene Messfrage.

Teil I erzählt die Entdeckung, Teil II rekonstruiert die beiden Wege bis zu ihrem Treffpunkt, Teil III beweist die Sätze, Teil IV entwickelt den akustischen Fingerabdruck und Teil V formuliert die physikalische Entscheidung.

Teil I • Die Idee im Überblick

Einleitung

Diese Untersuchung begann als Suche nach einem besonderen Ton. Sie endete bei etwas Genauerem: zwei Rechenwegen, die einander nicht kennen und dennoch am selben Punkt eintreffen.

Stellen Sie sich vor, Sie betreten einen Raum, der nichts erklärt. Keine Inschrift sagt, wozu er diene. Kein Bild verrät, wie er gelesen werden will. Es gibt nur Stein, Kanten, Proportionen und eine Stille, die älter ist als jede Frage, die man ihr stellen kann.

Unsere Forschung begann mit einer naheliegenden Verlockung: Vielleicht verbirgt sich in solchen Maßen ein besonderer Ton. Doch je strenger die Suche wurde, desto deutlicher zeigte sich ihr Grundproblem. Wo viele Zahlen und viele Freiheiten zusammenkommen, entstehen schöne Frequenztreffer von selbst, so wie an jedem großen Sternenhimmel irgendwo ein Sternbild wartet. Die Suche musste sich ändern, sonst hätte sie immer nur sich selbst gefunden.

An die Stelle der Frage „Welche Frequenz ist richtig?“ trat darum eine härtere Frage: „Welche Struktur bleibt übrig, wenn wir die schönen Zufälle aussortieren?“ Übrig blieben ein Dreieck und ein Quader. Dreieck und Quader tragen denselben Zahlenwert 1320. Später zeigt sich eine zweite Verbindung: Die beiden Herleitungswege treffen zusätzlich bei der primitiven Normdarstellung $125 = 2^2 + 11^2$.

Diese Arbeit erzählt, wie daraus ein mathematisches Uhrwerk wird. Es besteht nicht aus geheimen Zahlen, sondern aus Regeln, und jede Regel nimmt Freiheit weg, bis genau eine Gestalt übrig bleibt. Am Ende steht keine fertige Behauptung über Gizeh, sondern eine saubere Trennung: Was ist bewiesen, was ist Modell, was ist Deutung, und was muss gemessen werden?

Worum geht es?

Diese Arbeit beginnt mit einem Dreieck und einem Quader.

Das rechtwinklige Dreieck hat die Seiten

$$48, 55, 73.$$

Seine Fläche ist die Hälfte von $48 \cdot 55$:

$$\frac{48 \cdot 55}{2} = 1320.$$

Der Quader hat die Kanten

$$10, 11, 12.$$

Sein Volumen ist

$$10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320.$$

Zwei geometrische Objekte, die zunächst nichts miteinander zu tun haben, tragen denselben Zahlenwert 1320, wie zwei Fremde mit demselben Fingerabdruck. Und es gibt eine zweite Verbindung:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 = 5 \cdot 73.$$

Die längste Seite des Dreiecks ist 73. Das Quadrat der Raumdiagonale des Quaders ist 365, also genau das Fünffache davon.

Das sieht nach einem Geheimnis aus. Aber Vorsicht: Große Zahlenräume sind freigiebig. Wer lange genug sucht, findet fast immer ein Paar, das zusammenzupassen scheint. Interessant wird es erst, wenn die Regeln vorher feststehen, nachträgliches Aussuchen unmöglich ist und trotzdem etwas übrig bleibt. Deshalb stellt diese Arbeit eine strengere Frage:

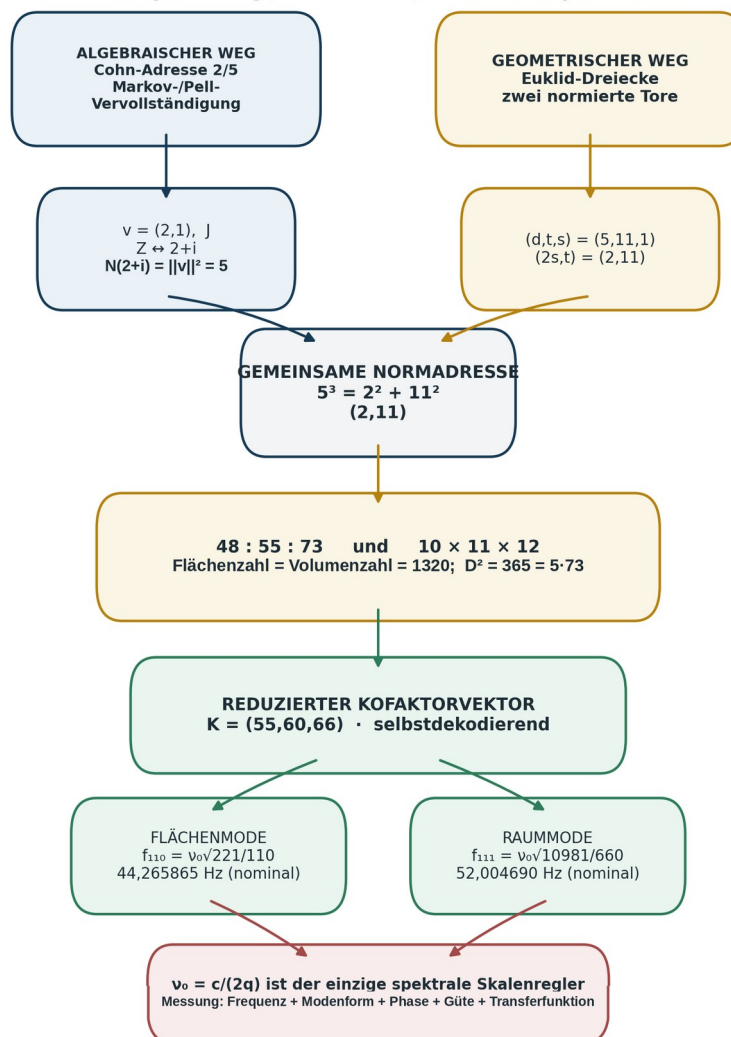
Gibt es eine kurze, offengelegte Regel, die genau dieses Dreieck und genau diesen Quader auswählt?

Die Idee in einem Bild

Zwei Wege starten getrennt. Der obere beginnt mit Matrizen, der untere mit Dreiecken und Quadern. Erst am Normpunkt werden ihre Ausgaben miteinander verglichen.

Das Uhrwerk der Fünf · Publikationsfassung 2.3.6

Zwei getrennte Wege, eine Normadresse, ein akustischer Fingerabdruck



Die Mathematik schließt im Modell; ob der reale Stein die Signatur trägt, bleibt eine offene Messfrage.

Abbildung I-1. Zwei getrennte Wege treffen am Normpunkt; daraus entstehen Raum, Kofaktorvektor, geeichte Modellmoden und eine offene Messfrage.

Oben steht ein Weg mit Zahlentafeln, die Mathematiker Matrizen nennen. Unten steht ein Weg mit rechtwinkligen Dreiecken und symmetrischen Quadern. Beide Wege treffen bei

$$5^3 = 2^2 + 11^2.$$

Aus dem geometrischen Weg entstehen danach das Dreieck 48:55:73 und der Quader 10 × 11 × 12.

Erster Weg: eine Richtung und eine Vierteldrehung

Dieser Weg liest kleine Zahlentafeln wie eine Maschine: Aus ihrer Summe entsteht eine Richtung, aus dem Unterschied ihrer Reihenfolgen eine Vierteldrehung.

Eine Matrix ist eine rechteckige Tabelle aus Zahlen. Die Arbeit betrachtet

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Ergänzungen sind fest gewählt und vorab offengelegt. Beide entstammen derselben Werkbank: einer bekannten Zahlentafel der Markov-Cohn-Theorie, ergänzt nach zwei festen Regeln. Man darf sie sich als zwei Zahnräder vorstellen, die auf dieselbe Achse passen. Die Einzelheiten stehen in Teil II und Teil III.

Addiert man G und S , erhält man

$$G + S = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Darin steckt die Richtung

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun werden die beiden Tabellen einmal in der Reihenfolge GS und einmal in der umgekehrten Reihenfolge SG multipliziert. Die Ergebnisse sind verschieden. Ihre Differenz ist ein Vielfaches von

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix dreht jeden Pfeil in der Ebene um 90° , wie einen Uhrzeiger, der eine Viertelstunde springt. Deshalb sprechen wir von einer Vierteldrehung. Merken Sie sich dieses Bild, es trägt weit: Aus dem Nichtvertauschen zweier Zahnräder entsteht eine Drehung. Der Pfeil $v = (2, 1)$ wird zu

$$Jv = (-1, 2).$$

Beide Pfeile sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Zusammen bilden sie den Rahmen

$$Z = [v, Jv] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J.$$

In Worten: zweimal geradeaus, einmal um die Ecke. Die Sprache der komplexen Zahlen schreibt dafür

$$2 + i.$$

Die dritte Potenz lautet

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i.$$

Daraus folgt

$$2^2 + 11^2 = 125 = 5^3.$$

Zweiter Weg: ein Dreieck und ein symmetrischer Quader

Dieser Weg arbeitet nur mit Dreiecken und Quadern. Zwei einfache Prüfungen sortieren alle unpassenden ganzzahligen Kandidaten aus.

Der zweite Weg vergisst die Matrizen vollständig. Er greift zum ältesten Werkzeug der Zahlgeometrie: Euklids Formel erzeugt aus zwei Erzeugerzahlen rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten. Sind die Erzeuger teilerfremd und von verschiedener Parität, ist das Dreieck primitiv, also nicht die vergrößerte Kopie eines kleineren. Wir verwenden die beiden Erzeugerzahlen m und k . Wir verwenden ihre Differenz und ihre Summe:

$$d = m - k, t = m + k.$$

Dann wird eine einfache Familie symmetrischer Quader festgelegt:

$$(t - s, t, t + s).$$

Die mittlere Kante ist t . Die beiden anderen liegen im gleichen Abstand s darunter und darüber.

Nun kommen zwei Siebe ins Spiel. Die Arbeit verlangt beides gleichzeitig:

1. Der Zahlenwert der Dreiecksfläche stimmt mit dem Zahlenwert des Quadervolumens überein.
2. Das Quadrat der Raumdiagonale ist über d an die längste Dreiecksseite gebunden.

Nach dem Einsetzen entstehen zwei Gleichungen, und fast alle Kandidaten fallen durch beide Siebe zugleich. Die Differenz der Gleichungen erzwingt zunächst

$$d = 5.$$

Danach bleibt

$$t^2 + (2s)^2 = 125.$$

Dafür gibt es nur zwei positive ganzzahlige Möglichkeiten. Die eine lässt eine Quaderkante auf null schrumpfen, aus dem Quader würde ein Brett. Übrig bleibt genau eine Lösung, bei der alle drei Kanten positiv bleiben:

$$t = 11, s = 1.$$

Damit lautet der Quader

$$(11 - 1, 11, 11 + 1) = (10, 11, 12).$$

Aus $d = 5$ und $t = 11$ folgen

$$m = 8, k = 3.$$

Euklids Dreiecksformel ergibt

$$2 \cdot 8 \cdot 3 = 48, 8^2 - 3^2 = 55, 8^2 + 3^2 = 73.$$

So entsteht das Dreieck 48:55:73.

Wo beide Wege zusammentreffen

Hier wird nicht behauptet, dass ein Weg den anderen verursacht. Gezeigt wird nur, dass beide getrennt definierten Konstruktionen dieselbe geordnete Zahlenpaarung hervorbringen; die Regeln der einen werden in der Rechnung der anderen nicht verwendet.

Man kann sich die beiden Wege wie zwei Seilschaften vorstellen, die verschiedene Wände desselben Berges klettern. Keine sieht die andere. Der erste Weg liefert aus $(2+i)^3$ das geordnete Paar

$$(2, 11).$$

Im zweiten Weg ist $s=1$ der Abstand der Quaderkanten und $t=11$ die mittlere Kante. Deshalb gilt dort ebenfalls

$$(2s, t) = (2, 11).$$

Beide Seilschaften stehen damit auf demselben Gipfelpunkt:

$$5^3 = 2^2 + 11^2.$$

Der Matrixweg baut den Quader nicht physisch, und der Quaderweg beweist keine alte Kenntnis von Matrizen. Die Aussage ist enger: Zwei getrennt definierte Konstruktionen treffen denselben ganzzahligen Normpunkt. Beide wurden zudem im selben Forschungsprojekt entwickelt. Ihr Zusammentreffen ist deshalb eine mathematische Schließung, kein zweiter, unabhängiger statistischer Beleg.

Was ist daran neu?

Neuheitsfragen werden hier bewusst eng gestellt: Nicht Euklid, Gauß oder Markov sind neu, sondern möglicherweise die konkrete Montage ihrer bekannten Bauteile.

Die einzelnen Bausteine sind überwiegend klassische Mathematik: Euklids Formel, Gaußsche Zahlen, Markov- und Cohn-Matrizen sowie die Akustik rechteckiger Räume. Der Neuheitsanspruch betrifft ihre konkrete gerichtete Verknüpfung. Eine abschließende Prioritätsprüfung steht noch aus.

Was hat das mit Gizeh zu tun?

Jetzt betritt der Stein die Geschichte. Die Mathematik wird mit einem idealisierten Kammermodell verglichen, aber nicht mit historischer Absicht gleichgesetzt.

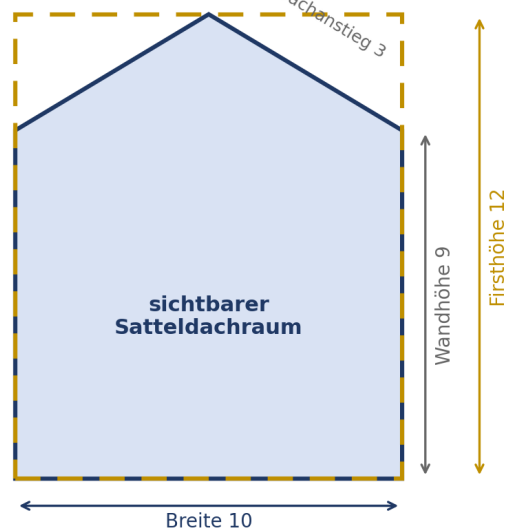
Die Königinnenkammer wird in dem hier verwendeten idealisierten Raster ungefähr als $10 \times 11 \times 12$ Königsellen bis zum First beschrieben. Der mathematisch ausgewählte Quader passt als Hüllquader zu diesem Raster: Er umschließt den Satteldachraum bis zur Firsthöhe; Abbildung I-2 stellt beide gegenüber.

Drei Gegenstände müssen getrennt bleiben:

1. **der erhaltene Steinraum** mit seinen vermessenen Flächen, Höhen, Fugen und Öffnungen;
2. **das idealisierte Ellenraster** als Rekonstruktions- und Vergleichsmodell;
3. **der mathematische Quader** als Ergebnis des Selektors.

Die Übereinstimmung rechtfertigt weitere Prüfung. Sie beweist weder eine historische Bauabsicht noch die Kenntnis moderner Zahlentheorie.

idealisierte Hüllquader $10 \times 11 \times 12$ (Länge 11 in die Tiefe)



Modellzuordnung

- M1** idealer Hüllquader (analytische Referenz)
- M2** Satteldachmodell mit Nische
- M3** scanbasierter Einzelraum
- M4** gekoppelter Realraum mit Zugängen

Der Hüllquader ist Referenz,
kein Abbild des Steinraums.

Abbildung I-2. Sichtbarer Satteldachraum und idealisierter Hüllquader mit Modellzuordnung M1 bis M4.

Auch

$$1 \text{ Königselle} = \frac{\pi}{6} m$$

ist hier eine moderne Rechenorm, keine historisch nachgewiesene altägyptische Meterdefinition.

Was hat das mit Klang zu tun?

Die Quaderkanten lassen sich in ein ideales Modengitter übersetzen. Diese Ausgabe zeigt zusätzlich, dass nicht ein einzelner Ton die Vorhersage bildet, sondern ein vollständiges Frequenzmuster, das ein einziger Skalenfaktor trägt.

Schreibt man die bekannte Frequenzformel des idealen Quaders auf einen gemeinsamen Nenner, erhält jede Raumachse als Gewicht das Produkt der beiden anderen Kanten, anschaulich die Fläche, die ihr gegenübersteht. Für $10 \times 11 \times 12$ sind diese drei Flächen

$$11 \cdot 12 = 132, 10 \cdot 12 = 120, 10 \cdot 11 = 110.$$

Diese Zahlen treten als Gewichte in der bekannten Frequenzformel eines idealen rechteckigen Raums auf. Nach Kürzung durch 2 erhält man

$$(66, 60, 55).$$

Für die drei axialen Grundmoden ist dies exakt ihr Frequenzverhältnis; im gesamten Modengitter wirken dieselben Zahlen als Gewichte einer quadratischen Form. Der Fachname ist **reduzierter Kofaktorvektor**. Aufsteigend geschrieben lautet dasselbe Verhältnis

$$55:60:66.$$

Das ist eine exakte Eigenschaft des idealen Quaders. Es ist noch kein gemessener Akkord der realen Kammer. Die Prüfung muss vom Quader über ein Satteldach- und Scanmodell bis zum gekoppelten Raum und zur realen Messung fortschreiten.

Ein einzelner Peak genügt nicht. Benötigt wird eine gemeinsame Messsignatur aus Frequenzverhältnissen, räumlicher Schwingungsform, Phase, Dämpfung und Übertragung zwischen Quelle und Empfänger.

Was die Arbeit neu schließt

Der Akkord wird zum Fingerabdruck: Er liest den Raum zurück, trennt Flächen- und Raummode und lässt sämtliche absoluten Hertzwerte an nur einem gemeinsamen Regler hängen.

Für $K=(55,60,66)$ sind die Paardifferenzen 5, 6 und 11 zugleich die jeweiligen größten gemeinsamen Teiler. Die Kürzungen rekonstruieren 11:12, 10:11 und 5:6. Der Raum trägt seinen Schlüssel im eigenen Frequenzverhältnis.

$$55:60 = 11:12, \quad 60:66 = 10:11, \quad 55:66 = 5:6$$

Die Zahl 221 gehört zur 10×11 -Flächenmode, 10981 zur räumlichen Diagonalmode. Beide werden durch denselben Skalenfaktor $\nu_0 = c/(2q)$ in Hertz gesetzt; kein Modus erhält einen eigenen Regler.

$$f_{110} = \nu_0 \cdot \sqrt{221/110}, \quad f_{111} = \nu_0 \cdot \sqrt{10981/660}, \quad 10f_{100} = 11f_{010} = 12f_{001} = \nu_0$$

Damit wird aus der früheren Suche nach einer Wunschfrequenz ein wesentlich härterer Test: Ein gemeinsamer Parameter muss Achsen-, Flächen- und Raummoden zugleich erklären.

Was ist bewiesen und was nicht?

Diese Tabelle ist die wichtigste Schutzlinie des Bandes. Sie trennt bewiesene Mathematik, bedingte Anwendungen und offene historische oder physikalische Fragen.

Aussage	Status
Die beiden Vervollständigungen besitzen die angegebenen Matriceigenschaften.	bewiesen
Ihre Determinantenbedingungen sind in der definierten Familie Markov- beziehungsweise Pell-Gleichungen; ihr positiver Schnitt ist (2,5).	bewiesen innerhalb der Vervollständigungsfamilie
Der Rahmen entspricht $2+i$, besitzt Index 5 und rekonstruiert C_5 durch $C_5 = 3vv^T + J$.	bewiesen
Die beiden Quaderbedingungen wählen (5,11,1) eindeutig aus.	bewiesen innerhalb der festgelegten Quaderfamilie
Daraus folgen 48:55:73 und $10 \times 11 \times 12$.	bewiesene Modellfolgen
Der Kofaktorvektor (55,60,66) dekodiert 5,6,11 und die Verhältnisse 10:11:12 zurück.	bewiesen für die parametrische Kofaktorfamilie
365, 10981 und 1320 bestimmen die Kanten 10,11,12 bis auf Permutation.	bewiesen im positiven Rechteckmodell
Alle M1-Frequenzen werden durch einen gemeinsamen Faktor ν_0 getragen.	bewiesen für M1
Die nominellen Werte 44,265865 Hz und 52,004690 Hz liegen im realen Raum vor.	noch nicht gemessen; modell- und umweltabhängig
Die Erbauer kannten diese Theorie.	nicht belegt
Die Struktur besitzt eine medizinische Wirkung.	nicht behauptet und nicht belegt

Schluss

Das Uhrwerk besteht nicht aus vielen geheimnisvollen Einzelzahlen. Es besteht aus einer kurzen Folge von Regeln, in der die Wahlmöglichkeiten kleiner werden und die Ausgaben rücklesbar bleiben. Diese Ausgabe ergänzt den letzten Schritt: Aus dem Raum entsteht kein einzelner „Gotteston“, sondern ein vollständiger Fingerabdruck, dessen relative Struktur skalenfrei ist.

Der geometrische Weg erzeugt daraus das Dreieck 48:55:73 und den Quader $10 \times 11 \times 12$; der algebraische Weg liefert unabhängig von dieser Quaderdefinition dieselbe geordnete Normadresse (2, 11). Das Zusammentreffen ist eine Übereinstimmung der beiden Konstruktionen, nicht der Ursprung der Quaderfamilie.

Damit ist die Mathematik prüfbar. Die historische und akustische Bedeutung bleibt offen.

Die Fünf ist hier kein geheimnisvoller Zauber. Sie ist der Punkt, an dem zwei getrennt definierte Rechenwege dieselbe Adresse liefern und an dem aus vielen Möglichkeiten genau eine nicht entartete Struktur übrig bleibt.

Vielleicht liegt das Erstaunliche deshalb nicht darin, dass eine Zahl wiederkehrt. Vielleicht liegt es darin, dass eine Ordnung ihre Gestalt wechseln und ihre Herkunft dennoch verraten kann: als Zahlentafel, komplexe Zahl, Dreieck, Raum, selbstlesender Akkord und schließlich als ein durch nur einen Regler geeichtes Klangmodell.

Nicht die wiederkehrenden Zahlen sind das Erstaunliche. Erstaunlich ist die schrumpfende Freiheit.

Teil II • Zwei Wege, ein Normpunkt

Teil I zeigte das Ziel. Dieser Teil rekonstruiert die Bewegung dorthin, ohne den formalen Beweis aus Teil III vorwegzunehmen. Die beiden Wege werden vollständig getrennt aufgebaut; erst ihre fertigen Ausgaben dürfen bei (2,11) verglichen werden.

II.1 Der Vertrag: Was gesetzt wird und was folgt

Die Stärke der Konstruktion liegt nicht in der Menge der Zahlen, sondern darin, dass bei jedem Schritt klar bleibt, woher er kommt. Klassische Theorie, Definition, Satz, Modell und Messung bleiben sauber getrennt.

Übernommen werden Cohn- und Markov-Theorie, Gaußsche Normen, Euklids Parametrisierung und die Standardakustik rechteckiger Räume. Definiert werden die beiden symmetrischen Vervollständigungsfamilien, die Quaderfamilie $B_s(t)=(t-s,t+s)$ und zwei dimensionslose Tore. Bewiesen werden die jeweiligen Ganzzahlauswahlen. Erst danach folgen Raum- und Klangmodell.

Die Zielwerte 48:55:73, $10 \times 11 \times 12$, 1320 und 365 waren bekannt, bevor der Selektor endgültig feststand. Sie gehörten zur Motivation der Suche, nicht zu einem vorab festgelegten Nachweis. Als Satz zählt erst, was danach unverändert blieb: Familie, Positivität, Nichtentartung und die beiden Tore.

Ebene	Was hier geschieht	Reichweite
Klassische Theorie	Cohn/Markov, Gauß, Euklid, Rechteckmoden	aus Literatur übernommen
Definition	Vervollständigungen, Quaderfamilie, zwei Tore	offengelegte Modellwahl
Satz A	simultane Vervollständigung wählt (2,5)	gesamter positiver Ganzzahlbereich der Familie
Satz B	Quaderselektor wählt (5,11,1)	gesamter positiver Ganzzahlbereich der Familie
Folgerung	48:55:73, $10 \times 11 \times 12$, 55:60:66	abhängig von Satz und Definition
Messung	reale Moden, Phase, Q und Transferfunktion	prospektiv und offen

II.2 Der algebraische Weg

Dieser Weg beginnt mit einer markierten rationalen Adresse und endet bei einem orientierten Gaußschen Normpunkt. Er kennt weder die Quaderfamilie noch die späteren Frequenzen.

Aus $Q=((1,1),(1,0))$ und $C_2=((2,1),(1,0))$ entstehen $A=Q^2$ und $B=C_2^2$. Ihr Produkt ist die Cohn-Matrix $C_5=((12,5),(7,3))$. Die Spuren von A, B und C_5 sind 3, 6 und 15; nach Division durch 3 steht der Markov-Knoten (1,2,5). Der Cohn-Index $12/5$ zerfällt in den Ast 2 und die reduzierte Adresse $\mu=2/5$.

$$C_5 = ((12,5),(7,3)), \quad I(C_5)=12/5=2+2/5, \quad \mu=2/5$$

Zwei feste symmetrische Ergänzungen führen zu $G=((8,5),(5,3))$ und $S=((12,5),(5,2))$. In der allgemeinen Familie sind ihre Determinantenbedingungen wörtlich eine Markov- und eine Pell-Gleichung:

$$\det G = -1 \Leftrightarrow 1+p^2+q^2=3pq$$

$$\det S = -1 \Leftrightarrow (q-p)^2 - 2p^2 = 1$$

Beide Bedingungen zugleich erzwingen $2q=5p$ und damit als einziges positives Ganzzahlpaar $(p,q)=(2,5)$. Die Fünf ist hier nicht nachträglich eingesetzt; sie ist die gemeinsame Skala des Schnittpunkts.

Summe und additiver Kommutator der beiden fertigen Matrizen lösen Richtung und Orientierung aus ihnen heraus:

$$G+S = 5vv^T, \quad [G,S]=GS-SG=25J, \quad v=(2,1), \quad J=((0,-1),(1,0)) \\ Z=[v,Jv]=((2,-1),(1,2)), \quad Z^T Z=5I, \quad \det Z=5$$

Unter der Identifikation der Ebene mit den komplexen Zahlen entspricht Z der Zahl $2+i$. Ihre Norm ist 5, ihre dritte Potenz lautet

$$(2+i)^3 = 2+11i, \quad 5^3 = 2^2+11^2$$

Der Weg ist in der gewählten Markierung rücklesbar: $C_5=3vv^T+J$ und $\text{tr}(C_5)/3=\|v\|^2=N(2+i)=5$. Adresse, Richtung, Norm und Ausgangsmatrix schließen zu einem Kreis. Die Vervollständigungsformeln bleiben Definitionen dieses Bandes; Markov und Pell sind ihre exakte klassische Einordnung.

II.3 Der geometrische Weg

Dieser Weg kennt keine Cohn-Matrix. Er beginnt mit Euklid-Eltern, baut daraus Dreieck und Quader und lässt zwei Tore alle unpassenden Ganzzahlpunkte entfernen.

Für ganze $m>k>0$ werden $d=m-k$ und $t=m+k$ gesetzt. Euklid liefert ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten dt , $(t^2-d^2)/2$ und $(t^2+d^2)/2$. Parallel wird die kürzeste positive arithmetische Quaderfolge um t gewählt:

$$B_s(t)=(t-s,t,t+s), \quad V=t(t^2-s^2), \quad D^2=3t^2+2s^2$$

Die beiden dimensionslosen Tore vergleichen den Gitterkoeffizienten der Dreiecksfläche mit dem des Quadervolumens und binden das Diagonalquadrat an d und die Hypotenuse:

$$A=V, \quad D^2=dh$$

Nach Einsetzen besitzen beide Gleichungen dieselbe rechte Seite. Ihre Differenz ist $2t^2(d-5)=0$. Da $t>0$ gilt, muss $d=5$ sein. Danach bleibt

$$t^2+(2s)^2=125$$

Die positiven Ganzzahllösungen sind $(t,s)=(5,5)$ und $(11,1)$. Die erste lässt die Kante $t-s$ auf null schrumpfen; sie ist entartet. Übrig bleibt genau

$$(d,t,s)=(5,11,1)$$

Damit folgen $m=(t+d)/2=8$ und $k=(t-d)/2=3$. Euklids Formel erzeugt 48:55:73; die Quaderkanten lauten 10, 11 und 12.

$$48^2+55^2=73^2, \quad 48 \cdot 55/2=10 \cdot 11 \cdot 12=1320, \quad 10^2+11^2+12^2=5 \cdot 73=365$$

Die gewählte Grammatik wurde zusätzlich gegen 40 gleich behandelte lokale Nachbarmodelle geprüft. Nur die symmetrische Offset-Struktur $(-1,0,1)$ mit unveränderten Toren besitzt im deklarierten Fenster eine Lösung. Das ist lokale Modellkritik, kein globaler Natürlichkeitssatz.

II.4 Die Kollision am Normpunkt

Bis hierher durften die beiden Wege nichts voneinander übernehmen. Der algebraische Weg kannte keinen Quader; der geometrische Weg kannte weder Cohn-Matrix noch Gaußsche Zahl. Nun werden ihre fertigen Ausgaben erstmals nebeneinandergelegt.

Der algebraische Weg liefert aus $(2+i)^3$ das geordnete Paar (2,11). Der geometrische Weg liefert aus $s=1$ und $t=11$ dasselbe geordnete Paar $(2s,t)=(2,11)$. Zwei Ermittler kommen von entgegengesetzten Enden und treffen am selben Tatort:

$$5^3 = 2^2 + 11^2$$

Diese Übereinstimmung ist der zentrale Verträglichkeitsbefund des Bandes. Sie zeigt nicht, dass der Matrixweg den Quader verursacht, und sie ist kein zweiter statistischer Zeuge: Beide Konstruktionen wurden im selben Forschungsprojekt entwickelt. Ihre Stärke liegt in der exakten Schließung zweier offengelegter Rechenwege.

Erst nach diesem Treffpunkt werden die sichtbaren Hauptobjekte freigegeben: aus $(d,t)=(5,11)$ folgen $(m,k)=(8,3)$, das Tripel 48:55:73 und die Box $10 \times 11 \times 12$.

II.5 Was der Treffpunkt freigibt

Der Treffpunkt ist nicht das Ende. Er erzeugt eine Raumstruktur, die ihre eigene Herkunft zurücklesen lässt.

Der reduzierte Kofaktorvektor des Quaders lautet aufsteigend $K=(55,60,66)$. Bei jedem Zahlenpaar ist die Differenz zugleich der größte gemeinsame Teiler:

$$|60-55|=\text{ggT}(55,60)=5, \quad |66-60|=\text{ggT}(60,66)=6, \quad |66-55|=\text{ggT}(55,66)=11$$

Die Kürzungen ergeben 11:12, 10:11 und 5:6. Der Akkord enthält damit Boxfolge, Balance und harmonischen Mittelwert. Zugleich gilt $11^2+60^2=61^2$: Der Kofaktorweg führt zu den Euklid-Eltern (6,5) zurück.

Seine quadratische Länge ist

$$55^2+60^2+66^2 = 10981 = 61^3-60^3$$

Für die Gram-Matrix $G_Q=\text{diag}(100,121,144)$ lautet das charakteristische Polynom

$$\chi_{GQ}(u)=u^3-365u^2+4 \cdot 10981u-1320^2$$

Damit sind 365, 10981 und 1320 keine drei losen Kapitel: Sie bestimmen die vollständigen elementarsymmetrischen Invarianten desselben idealen Quaders und damit die Kanten 10, 11 und 12 bis auf ihre Reihenfolge. Teil IV liest daraus den axialen Akkord, die 221-Flächenmode, die 10981-Raummode und den einen Skalenfaktor v_0 .

II.6 Reichweite, Gizeh und Scheitern

Drei Ebenen bleiben getrennt: der erhaltene Steinraum mit Fugen, Nische und Öffnungen; das idealisierte 9-10-11-12-Ellenraster; und der mathematisch ausgewählte Quader. Die Nähe dieser Ebenen rechtfertigt Simulation und Messung, aber weder historische Bauabsicht noch Kenntnis moderner Zahlentheorie.

Die Arbeit darf auf drei Arten scheitern. Mathematisch würde sie scheitern, wenn Satz A, Satz B oder ein ergänzender Satz falsch ist. Modelltheoretisch würde sie geschwächt, wenn eine gleich einfache Konkurrenzgrammatik dieselbe oder bessere Schließung liefert. Physikalisch scheitert die Anwendung, wenn M2 bis M4 den M1-Fingerabdruck nicht bewahren oder wenn Messdaten nur durch nachträgliche Einzelanpassungen erklärt werden können.

Die folgenden Seiten wechseln deshalb die Funktion: Teil III beweist, Teil IV eicht, Teil V legt fest, welche gemeinsame Signatur der reale Raum bestehen müsste. Neu ist allein, wie diese bekannten Bauteile hier zu einer gerichteten Kette zusammengesetzt werden; eine unabhängige Prioritätsprüfung bleibt nötig.

Teil III • Formale Sätze und Beweise

Teil III ist das Prüfprotokoll der Mathematik. Hier wird jede Behauptung in Definition, Satz, Beweis und Grenze zerlegt. Man kann ihn auf zwei Weisen lesen: zuerst die kurzen Erklärungen unter den Überschriften, dann bei Bedarf die vollständigen Beweise, die zum Nachschlagen und für die fachliche Prüfung da sind.

Dieser Teil enthält die vollständigen Definitionen und Beweise. Gizeh, Meter und Hertz werden für keinen mathematischen Satz benötigt. Die Anwendungen aus Teil II beginnen erst nach den hier festgelegten Modellannahmen.

III.1 Ausgangsdaten und Hauptresultate

Dieser Teil beginnt mit einer Landkarte. Eingaben, Resultate und Abhängigkeiten werden vor den Beweisen vollständig benannt.

Markov-Zahlen, Cohn-Matrizen, Gaußsche ganze Zahlen und Euklids Parametrisierung gehören zu bekannten Teilen der Zahlentheorie. Die vorliegende Arbeit untersucht eine konkrete Verbindung zwischen diesen Strukturen und einem bedingten ganzzahligen Selektor für symmetrische Quader.

Die Ausgangsmatrix ist

$$C_5 = Q^2 C_2^2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$

mit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Cohn-Index $12/5$ entspricht, nach Abzug des ganzzahligen Anteils im $a=2$ -Fundamentalebene, dem Markov-Bruch $2/5$ [M2, § 3.2; M3, Satz 3.1]. Aus C_5 werden zwei symmetrische Matrizen mit Determinante -1 konstruiert. Ihre Summe und ihr Kommutator erzeugen einen Rahmen der Norm 5. Ein zweiter, formal getrennter Konstruktionsteil wählt aus einer Familie symmetrischer Quader genau den Punkt $(5, 11, 1)$ aus.

Die Hauptaussagen sind:

Satz A. Innerhalb der in Abschnitt III.2.3 angegebenen Vervollständigungsfamilie ist $(p, q) = (2, 5)$ das einzige positive ganzzahlige Paar, für das beide Matrizen Determinante -1 besitzen.

Satz B. Für positive ganze $m > k$ und $s \geq 1$ erfüllt in der Familie $B_s(t) = (t - s, t, t + s)$ genau der nicht entartete Punkt $(d, t, s) = (5, 11, 1)$ die beiden Bedingungen $A = V$ und $D^2 = d h$.

Proposition C. Die algebraische und die geometrische Konstruktion liefern, nach Festlegung der jeweiligen Orientierung, dieselbe primitive Darstellung

$$5^3 = 2^2 + 11^2.$$

III.2 Cohn-Index und Satz A: simultane Vervollständigung

Dieser Abschnitt zeigt, dass die beiden konkreten Ergänzungen nach Festlegung von Ausgangszeile beziehungsweise Ausgangsspalte und Determinante -1 eindeutig sind und dass die Adresse $2/5$ innerhalb der gewählten Bedingungen eindeutig entsteht; die Wahl der allgemeinen Vervollständigungsfamilie bleibt Teil des offengelegten Modellvertrags.

III.2.1 Klassischer Ausgangspunkt

Kurz gesagt. Der Beweis beginnt mit genau benannten Standardmatrizen. So ist jederzeit sichtbar, was aus der Literatur kommt und was in dieser Arbeit hinzukommt.

Die Matrizen

$$A(2)=Q^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B(2)=C_2^2=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sind der $a=2$ -Fall der Cohn-Anfangsmatrizen [M1, Satz 4.13; M3, Gl. (11) und §4]. Ihr Produkt ist

$$C_5=A(2)B(2)=\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Spurwerte $(3, 6, 15)$ liefern nach Division durch 3 den Markov-Knoten $(1, 2, 5)$. Zudem gilt

$$\text{tr}[A(2), B(2)] = -2,$$

wobei $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ den Gruppenkommutator bezeichnet. Er ist streng von dem später für G und S verwendeten additiven Kommutator $GS - SG$ zu unterscheiden; wo Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir den additiven Kommutator ausgeschrieben. Dies ist die parabolische Fricke-Bedingung für den einmal berandeten Torus [M5; M6].

Der Cohn-Index, hier stets der Quotient der oberen Zeile, von C_5 ist

$$I(C_5) = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}.$$

Nach Veselovs Identifikation von Cohn-Indizes und Markov-Brüchen [M3, Satz 3.1] ist $2/5$ der reduzierte Bruch im hier verwendeten Fundamentalbereich.

III.2.2 Konkrete Vervollständigungen

Kurz gesagt. Die konkreten Ergänzungen sind einfache lineare Gleichungen. Sie zeigen am Beispiel, wie die später allgemeine Aussage funktioniert.

Aus der rechten Spalte $(5, 3)^T$ entsteht durch symmetrische Vervollständigung

$$\begin{pmatrix} x & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\det = -1$ ergibt $3x - 25 = -1$, also $x=8$ und

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = Q^5.$$

Aus der oberen Zeile $(12, 5)$ entsteht analog

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & y \end{pmatrix};$$

$12y - 25 = -1$ liefert $y = 2$ und

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = C_2^3.$$

III.2.3 Satz A: allgemeine Vervollständigungsfamilie

Kurz gesagt. Satz A hebt die Beispielrechnung auf eine ganze Familie. Er zeigt, dass unter den positiven Ganzzahlen nur die Adresse $2/5$ beide Bedingungen zugleich erfüllt.

Definition A. Für positive ganze Zahlen $p < q$ seien

$$G(p, q) = \begin{pmatrix} 2q - p & q \\ q & q - p \end{pmatrix}, S(p, q) = \begin{pmatrix} 2q + p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Satz A. Das Gleichungssystem

$$\det G(p, q) = \det S(p, q) = -1$$

besitzt genau die positive ganzzahlige Lösung $(p, q) = (2, 5)$.

Beweis. Es gilt

$$\det G = p^2 + q^2 - 3pq, \det S = p^2 + 2pq - q^2.$$

Die Differenz der beiden Determinanten ist

$$q(2q - 5p).$$

Daher ist $2q = 5p$. Wegen $\gcd(2, 5) = 1$ existiert $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $p = 2r$ und $q = 5r$. Einsetzen in eine Determinantengleichung ergibt $-r^2 = -1$, also $r = 1$. $\square$

Die Rechnung ist vollständig; die linearen Formen in Definition A sind jedoch eine Festlegung dieser Arbeit. Definition A ist die einfachste von uns gefundene affine Interpolation der beiden konkreten Vervollständigungen; ihre Natürlichkeit oder Kanonizität bleibt Gegenstand weiterer Untersuchung.

III.2.4 Korollar A1: Markov- und Pell-Gesicht

Kurz gesagt. Satz A kann klassisch gelesen werden: Die erste Ergänzung liegt auf der Markov-Fläche, die zweite auf einer Pell-Kurve. Die eindeutige Adresse $2/5$ ist ihr positiver Schnitt innerhalb der definierten Familie.

Korollar A1. Für positive ganze p, q gilt

$$\det G(p, q) = -1 \Leftrightarrow 1 + p^2 + q^2 = 3pq,$$

$$\det S(p, q) = -1 \Leftrightarrow (q - p)^2 - 2p^2 = 1.$$

Die simultane Erfüllung besitzt genau die positive Lösung $(p, q) = (2, 5)$.

Beweis. Aus den Definitionen folgen $\det G = p^2 - 3pq + q^2$ und $\det S = p^2 + 2pq - q^2$. Die beiden Äquivalenzen entstehen durch Umstellen. Die Eindeutigkeit ist Satz A. $\square$

Einordnung. Dies ist keine zweite Selektion, sondern eine klassische Normalform der bereits verwendeten Determinantenbedingungen.

III.3 Rahmen, invariantes Untergitter und Gaußsche Zahl

Hier wird gezeigt, warum aus den beiden Matrizen ein gemeinsamer ganzzahliger Rahmen entsteht und welche Aussagen davon unabhängig von der gewählten Darstellung sind.

III.3.1 Summe und Kommutator

Kurz gesagt. Addition extrahiert die gemeinsame Richtung; der Kommutator misst die Abhängigkeit von der Reihenfolge und liefert die Vierteldrehung.

Für die konkreten Matrizen G und S gilt

$$G + S = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 5 v v^T, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner

$$GS - SG = 25J, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = -I.$$

Die Summe bestimmt die Gerade $\mathbb{R}v$; der Kommutator bestimmt die Orientierung. Der Rahmen

$$Z = [v, Jv] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$Z^T Z = 5I, \det Z = 5.$$

Damit erzeugen die Spalten ein Untergitter $\Lambda = Z\mathbb{Z}^2$ vom Index 5.

III.3.2 Gemeinsame Invarianz

Kurz gesagt. Beide Matrizen schicken das gleiche Index-5-Untergitter wieder in sich selbst. Das Gitter ist daher kein einmaliger Rechenrick.

Direkte Konjugation ergibt

$$Z^{-1} G Z = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z^{-1} S Z = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z^{-1} C_5 Z = \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Matrizen sind ganzzahlig. Folglich ist Λ unter G , S und C_5 invariant.

Unter der Standardidentifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ entsprechen die Spalten von Z den Gaußschen ganzen Zahlen $2+i$ und $i(2+i)$. Daher ist

$$\Lambda \cong (2+i)\mathbb{Z}[i].$$

Der Gitterindex stimmt mit der Idealnorm überein. Die Latimer-MacDuffee-Korrespondenz bildet hierzu einen allgemeinen Kontext [M7], wird aber für diesen konkreten Nachweis nicht benötigt.

III.3.3 Primitive Normdarstellung

Kurz gesagt. Die Gleichung $11^2 + 2^2 = 125$ ist die primitive Summe-zweier-Quadrate-Darstellung, die beide Herleitungswege später wiederfinden.

Für $z = 2 + i$ gilt

$$z^2 = 3 + 4i, z^3 = 2 + 11i.$$

Da $N(z) = 5$, folgt

$$N(z^3) = 5^3 = 2^2 + 11^2.$$

Die geordnete Form $(2, 11)$ hängt von der Orientierung ab. Ohne Markierung ist nur die Äquivalenzklasse unter Gaußschen Einheiten und Konjugation kanonisch.

III.3.4 Basis- und Orientierungsabhängigkeit

Kurz gesagt. Einzelne Koordinaten hängen von Basis und Orientierung ab. Norm, Determinantenbetrag und Gitterindex bleiben jedoch erhalten.

Die Matrix Z hängt von der geordneten Wahl (G, S) und der Standardbasis von $\mathbb{Z}^2$ ab. Unter Vertauschung von G und S ändert sich J zu $-J$; damit wird $2 + i$ zu $2 - i$. Unter Multiplikation mit einer Gaußschen Einheit oder Konjugation ändern sich Vorzeichen und Reihenfolge der Koordinaten. Invariant bleiben

$$Z^T Z = 5I, \det Z = 5,$$

sowie die primitive Normklasse von 5^3 .

III.3.5 Korollar A2: Rückbau und Selbstindizierung

Kurz gesagt. Der Rahmen trägt nicht nur die Adresse $2/5$; er rekonstruiert die Cohn-Matrix und liest seinen eigenen Index als Norm.

Korollar A2. Mit $v = (2, 1)^T$ und $J = ((0, -1), (1, 0))$ gilt

$$C_5 = 3vv^T + J = ((12, 5), (7, 3)).$$

$$\text{tr}(C_5)/3 = v^T v = N(2+i) = 5, \quad \mu = \text{Re}(2+i)/N(2+i) = 2/5.$$

Beweis. Es ist $vv^T = ((4, 2), (2, 1))$; daher $3vv^T + J = ((12, 5), (7, 3))$. Spur und Norm ergeben unmittelbar $15/3 = 5$ und $2^2 + 1^2 = 5$. $\square$

Die konkrete Schreibweise der Selbstindizierung hängt von Basis und Orientierung ab. Tragend bleiben Norm, Index und die markierte Rückbaubeziehung.

III.4 Satz B: Selektor für symmetrische Quader

Dies ist der vollständige Selektorbeweis. Alle Modellannahmen stehen vor der Rechnung; danach darf nur noch die Algebra entscheiden.

III.4.1 Definitionen und Satzvertrag

Kurz gesagt. Der Satzvertrag legt zuerst fest, welche Dreiecke, Quader und Positivitätsbedingungen zugelassen sind. Erst danach beginnt der Beweis.

Seien $m > k > 0$ ganze Zahlen und

$$d = m - k, t = m + k.$$

Euklids Parametrisierung lautet in diesen Koordinaten

$$a = d t, b = \frac{t^2 - d^2}{2}, h = \frac{t^2 + d^2}{2}.$$

Die Fläche ist

$$A = \frac{d t (t^2 - d^2)}{4}.$$

Definition 4.1. Für $s \geq 1$ und $t > s$ sei

$$B_s(t) = (t - s, t, t + s).$$

Dann

$$V = t(t^2 - s^2), D^2 = 3t^2 + 2s^2.$$

Die Bedingungen $A = V$ und $D^2 = d h$ sind als Gleichheiten dimensionsloser Gitterkoeffizienten zu verstehen.

III.4.2 Eindeutigkeitsbeweis

Die Differenz der beiden Torgleichungen erzwingt $d = 5$; ihre Summe führt zur Normgleichung. Damit bricht die gesamte Suche auf zwei kurze Schritte zusammen.

Satz B. In der Familie aus Definition 4.1 erfüllen die Bedingungen

$$A = V, D^2 = d h$$

für positive ganze $m > k$ und $s \geq 1$ genau den nicht entarteten Punkt

$$(d, t, s) = (5, 11, 1).$$

Beweis. Aus $A = V$ folgt

$$t^2(d - 4) = d^3 - 4s^2.$$

Aus $D^2 = d h$ folgt

$$t^2(6 - d) = d^3 - 4s^2.$$

Subtraktion liefert $2t^2(d - 5) = 0$, also $d = 5$. Einsetzen ergibt

$$t^2 + 4s^2 = 125.$$

Wegen $4s^2 < 125$ gilt $1 \leq s \leq 5$; unter diesen Werten ist $125 - 4s^2$ nur für $s=1$ und $s=5$ ein Quadrat, nämlich 121 und 25. Die positiven ganzzahligen Lösungen sind $(t, s) = (11, 1)$ und $(5, 5)$. Der zweite Fall hat $t = s$ und $k = 0$ und ist somit entartet. $\square$

Der Satz gilt global im positiven ganzzahligen Suchraum der definierten Familie. Er ist keine Aussage über sämtliche möglichen Quaderparametrisierungen. Die Gleichung $t^2 + 4 = d^3$ allein besitzt auch die positive Lösung $(d, t) = (2, 2)$; die Eindeutigkeit beruht auf beiden Bedingungen und den Nichtentartungsannahmen.

III.5 Proposition C: Übereinstimmung am primitiven Normpunkt

Die Proposition vergleicht die Ergebnisse beider Wege. Sie behauptet Übereinstimmung der Koordinaten, keine historische oder physikalische Kopplung.

Aus Satz B folgt

$$(t, 2s) = (11, 2)$$

und damit

$$5^3 = t^2 + (2s)^2.$$

Aus Abschnitt III.3 folgt

$$(2+i)^3 = 2 + 11i.$$

Proposition C. Nach den angegebenen Orientierungen gilt

$$\left(\operatorname{Re}((2+i)^3), \operatorname{Im}((2+i)^3) \right) = (2s, t) = (2, 11).$$

Daraus folgen

$$m = 8, k = 3,$$

$$(a, b, h) = (48, 55, 73)$$

bis auf die Reihenfolge der Katheten sowie

$$B_1(11) = (10, 11, 12).$$

Am ausgewählten Punkt gelten

$$\frac{48 \cdot 55}{2} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$$

und

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 5 \cdot 73 = 365.$$

Die Proposition ist eine Übereinstimmungsaussage. Sie leitet Definition 4.1 nicht aus der Cohn-Theorie her und bildet keinen unabhängigen statistischen Beleg.

Lemma (primitive Darstellung). Bis auf Vorzeichen, Vertauschung der Koordinaten und Konjugation ist $125 = 2^2 + 11^2$ die einzige primitive Darstellung von 125 als Summe zweier Quadrate. Die zweite positive Darstellung $125 = 5^2 + 10^2$ hat den gemeinsamen Teiler 5 und ist nicht primitiv. Beweis: Direktes Durchprobieren aller Quadratpaare unterhalb von 125 liefert nur (2, 11) und (5, 10); allein das erste Paar ist teilerfremd.

III.6 Ergänzende Sätze

Diese Sätze schließen den Weg von der ausgewählten Box zu ihrem selbstlesenden Frequenzsystem. Sie folgen exakt aus den parametrisierten Familien und sind keine zusätzlichen statistischen Zeugen für Gizel.

III.6.1 Satz D: Kofaktor-Selbstdecoder

Kurz gesagt. Bei der konsekutiven Boxfamilie unterscheiden sich die Komponenten des Kofaktorvektors genau um die Zahlen, durch die sie sich jeweils gemeinsam kürzen lassen.

Für $d \geq 1$ sei die Boxfamilie

$$B_d = (2d, 2d+1, 2d+2)$$

und ihr aufsteigend geordneter, durch 2 reduzierter Kofaktorvektor

$$K_d = (d(2d+1), 2d(d+1), (d+1)(2d+1)) = (k_1, k_2, k_3).$$

Satz D. Es gilt

$$\begin{aligned}k_2 - k_1 &= \text{ggT}(k_1, k_2) = d, \\k_3 - k_2 &= \text{ggT}(k_2, k_3) = d+1, \\k_3 - k_1 &= \text{ggT}(k_1, k_3) = 2d+1.\end{aligned}$$

Daher rekonstruieren die paarweisen Kürzungen die Verhältnisse

$$k_1:k_2 = (2d+1):2(d+1), \quad k_2:k_3 = 2d:(2d+1), \quad k_1:k_3 = d:(d+1).$$

Beweis. Die Differenzen folgen durch Ausmultiplizieren. Für den ersten größten gemeinsamen Teiler gilt $\text{ggT}(k_1, k_2) = d \cdot \text{ggT}(2d+1, 2d+2) = d$; die beiden anderen Fälle folgen analog aus der Teilerfremdheit aufeinanderfolgender Zahlen. $\square$

Für $d=5$ entsteht $K_5=(55,60,66)$. Seine Kürzungen ergeben 11:12, 10:11 und 5:6 und lesen damit Box und Balance zurück.

III.6.2 Korollar D1: Euklid-Rückweg und Kubusschale

Setze $h_d = 2d^2 + 2d + 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2d+1)^2 + (2d(d+1))^2 &= h_d^2, \\ \|K_d\|^2 &= h_d^3 - (h_d - 1)^3.\end{aligned}$$

Für $d=5$ lautet dies

$$11^2 + 60^2 = 61^2, \quad 55^2 + 60^2 + 66^2 = 10981 = 61^3 - 60^3.$$

Beweis. Beide Identitäten folgen nach Ausmultiplizieren; die erste ist Euklids Formel für die Eltern $(d+1, d)$, die zweite die Differenz zweier aufeinanderfolgender Kuben.

III.6.3 Satz E: Gram-Vollständigkeit des Referenzquaders

Kurz gesagt. Volumentor, Diagonaltor und Kofaktornorm sind nicht drei lose Kapitel. Sie bestimmen die drei elementarsymmetrischen Koeffizienten derselben Gram-Matrix.

Für $G_Q = \text{diag}(100, 121, 144)$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_{GQ}(u) &= u^3 - 365u^2 + 43924u - 1742400 \\ &= u^3 - 365u^2 + 4 \cdot 10981u - 1320^2.\end{aligned}$$

Satz E. Das Tripel $(365, 10981, 1320)$ bestimmt die positive Kantenmenge $\{10, 11, 12\}$ eindeutig bis auf Permutation.

Beweis. Die drei Größen bestimmen $e_1=365$, $e_2=4 \cdot 10981$ und $e_3=1320^2$ und damit das normierte kubische Polynom mit den Wurzeln 100, 121, 144. Positive Quadratwurzeln liefern 10, 11, 12. $\square$

Grenze. Der Satz ist vollständig für symmetrische Kanteninvarianten des idealen Rechteckmodells. Reale Akustik besitzt zusätzliche Daten wie Impedanz, Öffnungen, Dämpfung und Kopplung.

III.6.4 Randkorollar F: Newton-Kantensatz

Kurz gesagt. Der musikalische Newton-Port trifft die aus derselben Fünf gebildete Kantenkorrektur nur an einem ganzzahligen Punkt. Dieser Satz erklärt 63/50, ist aber keine Raumfrequenzbehauptung.

Sei $N(x) = x - (x^3 - 2)/(3x^2)$ der Newton-Schritt für $x^3=2$. Für ganze $d > 1$ gilt

$$N(d/(d-1)) - d/(d-1) - 1/(2d)^2 = (d-5)(2d-1)^2 / (12d^2(d-1)).$$

Daher ist $N(d/(d-1)) = d/(d-1) + 1/(2d)^2$ genau bei $d=5$. Dann

$$5/4 + 1/10^2 = 63/50, \quad 63^3 - 2 \cdot 50^3 = 47.$$

Für die Balancematrix $H_5 = ((6, 5), (5, 4))$ gilt außerdem $H_5^2 + 2I = ((63, 50), (50, 43))$; der Quotient der beiden Einträge der ersten Zeile ist erneut 63/50.

Beweis. Die angegebene Differenz faktorisiert direkt; für $d > 1$ verschwindet sie nur bei $d=5$. Die Matrixidentität folgt durch Quadrieren. $\square$

Evidenzstatus. Newton-Schritt, Matrixschatten und Rest 47 sind abhängige Formen desselben Portkerns und werden nur einmal gezählt [B2].

III.7 Lokaler Modellvergleich

Der lokale Modellvergleich prüft, ob nahe und gleich einfache Alternativen ebenso leicht zum Ziel führen. Er ist eine Robustheitsprüfung, kein globaler Naturbeweis.

Zur Prüfung der konkreten Modellwahl wurden Quader der Form

$$(t + r_1 s, t + r_2 s, t + r_3 s)$$

für alle

$$r_1 < r_2 < r_3, r_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

unter den vier Torvarianten

$$A = \alpha V, D^2 = \beta d h, (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$$

untersucht. Für jede der 40 Kombinationen galten dieselben Primitivitäts-, Paritäts- und Positivitätsbedingungen sowie $m \leq 120$ und $s \leq 60$. Nur $(-1, 0, 1)$ mit $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ besitzt eine Lösung; sie lautet $(m, k, d, t, s) = (8, 3, 5, 11, 1)$.

Der Vergleich ist retrospektiv und lokal. Er zeigt Robustheit gegenüber den untersuchten Nachbarn, aber keine globale Optimalität der Modellklasse.

III.8 Mathematische Einordnung und offene Fragen

Zum Schluss wird der mathematische Rang der Ergebnisse eingeordnet: Was ist klassisch, was ist ein Kompositionskandidat und welche Fragen bleiben offen?

Die klassischen Bausteine dieser Arbeit sind in der Literatur etabliert [M1-M8]. Der vorläufige Neuheitsanspruch betrifft:

1. die konkrete simultane Vervollständigungsfamilie aus Definition A;
2. die Verwendung von Summe und Kommutator zur Gewinnung des Rahmens Z aus dem geordneten Paar (G, S) ;
3. die gemeinsame Invarianz des daraus entstehenden Index-5-Untergitters unter G, S und C_5 ;
4. den bedingten Selektorsatz für $B_s(t)$;
5. die Übereinstimmungsproposition am geordneten Normpunkt $(2, 11)$.

Eine identische Gesamtkomposition wurde in der bislang durchgeführten Suche nicht gefunden (Literaturstand: 17. Juli 2026). Diese negative Suche ersetzt weder eine systematische Prioritätsprüfung noch ein unabhängiges Fachgutachten. Die ergänzten Korollare und Sätze A1, A2, D, D1, E und F sind vor einer endgültigen Veröffentlichung zusätzlich gegen Konkurrenzfamilien und Prior Art zu prüfen:

1. die Markov-/Pell-Normalform der simultanen Vervollständigung;
2. der Rückbau $C_5 = 3vv^T + J$ und die Selbstindizierung $\text{tr}(C_5)/3 = \|v\|^2$;
3. der Kofaktor-Selbstdecoder und die Kubusschalen-Identität;
4. der Gram-Vollständigkeitssatz des Referenzquaders;
5. der Newton-Kantensatz als klar getrenntes Randkorollar.

Offen bleiben die Klassifikation weiterer kurz beschreibbarer Quaderfamilien samt expliziter Komplexitätsmetrik, eine natürlichere kategorische oder gruppentheoretische Formulierung der Vervollständigungsfamilie, die Prüfung einer allgemeineren Index-5-Invarianz und die vollständige Prior-Art-Suche zu den kombinierten Sätzen.

Teil IV · Der eine Regler

Von der mathematischen Adresse zur geeichten Frequenz

Dieser Teil ist die neue Anwendungsschicht dieser Ausgabe. Er leitet zuerst das vollständige dimensionslose Frequenzmuster des idealen $10 \times 11 \times 12$ -Quaders her. Erst danach kommen nominelle Hertzwerte hinzu. Der reale Stein wird hier noch nicht gemessen.

IV.1 Das Eichprinzip

Eine Frequenz braucht eine Länge und ein Medium. Die Geometrie legt das Verhältnis der Töne fest; Maßstab und Schallgeschwindigkeit legen nur fest, wie hoch oder tief das ganze Muster in Hertz liegt.

Für die Kanten $L_x=10q$, $L_y=11q$ und $L_z=12q$ lautet das ideale Neumann-Spektrum

$$f_{n_x n_y n_z} = (c/2q) \cdot \sqrt{(n_x^2/10^2 + n_y^2/11^2 + n_z^2/12^2)}.$$

Wir setzen

$$\nu_0 = c/(2q).$$

Damit besitzt jede Modellfrequenz die Form $f_n = \nu_0 \sqrt{Q_n}$, wobei Q_n eine vollständig dimensionslose rationale Zahl ist. Aus Frequenzen allein sind c und q deshalb zunächst nicht getrennt identifizierbar; das Spektrum sieht nur ihren Quotienten. Physikalisch bleiben c und q selbstverständlich verschiedene Größen und können unabhängig gemessen werden.

Für die Modellkonvention $q=\pi/6$ m und $c=343$ m/s gilt

$$\nu_0 = 3c/\pi = 1029/\pi \text{ Hz} \approx 327,540872883 \text{ Hz}.$$

Alle späteren Nominalwerte dieser Ausgabe sind Ableitungen dieser Konvention, keine Messwerte der Kammer.

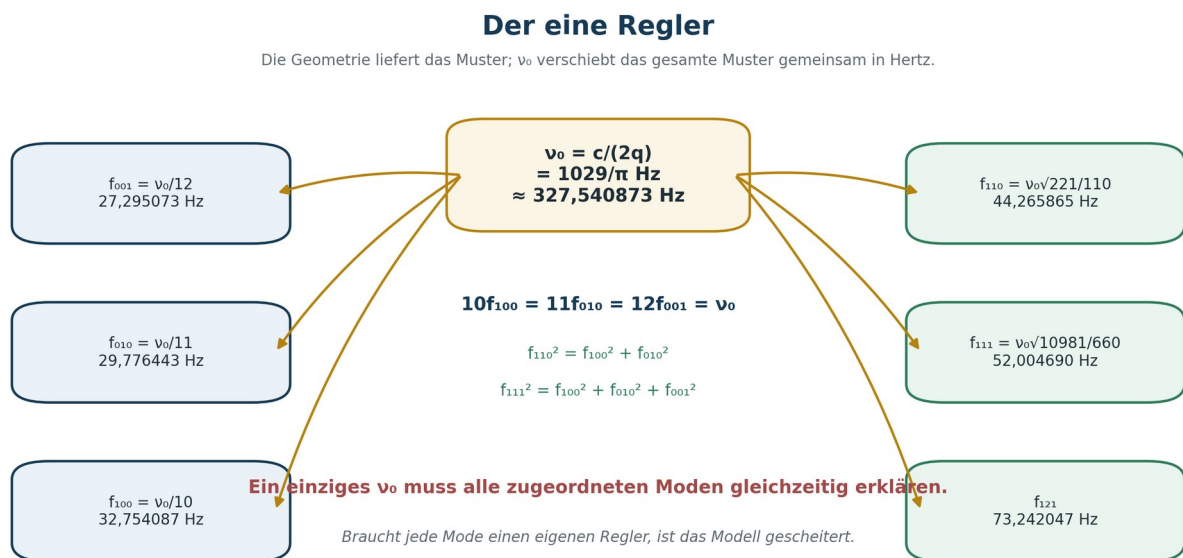


Abbildung IV-1. Ein einziger Skalenfaktor ν_0 verschiebt das ganze dimensionslose Modenmuster gemeinsam in Hertz.

IV.2 Der axiale Fingerabdruck 55:60:66

Die drei einfachsten Moden schwingen jeweils nur entlang einer Achse. Ihre Frequenzen sind die Kehrwerte der Kanten, multipliziert mit demselben ν_0 .

$$f_{100} = \nu_0/10, \quad f_{010} = \nu_0/11, \quad f_{001} = \nu_0/12.$$

$$10f_{100} = 11f_{010} = 12f_{001} = \nu_0.$$

Achsengeordnet lautet ihr Verhältnis 66:60:55; nach Frequenz aufsteigend geschrieben 55:60:66. Dieses Verhältnis ist unabhängig von q , c , Meter, Königselle und Temperatur.

Mode	exakter Faktor	nominal bei $q=\pi/6$ m, $c=343$ m/s	Rolle
f_{001}	$\nu_0/12$	27,295073 Hz	Achse 12; tiefste axiale Grundmode
f_{010}	$\nu_0/11$	29,776443 Hz	Achse 11
f_{100}	$\nu_0/10$	32,754087 Hz	Achse 10

Der selbstdekodierende Charakter ist praktisch wichtig: Aus einem gemessenen Verhältnis nahe 55:60:66 lassen sich die drei Achsen nur dann glaubwürdig zuordnen, wenn auch Differenzen, Kürzungen und räumliche Modenformen zusammenpassen.

IV.3 Die 221-Flächenmode und die 10981-Raummode

Zwei Wurzelgrößen verbinden die neue Zahlentheorie direkt mit dem idealen Modenspektrum. Sie dürfen nicht miteinander verwechselt werden.

Für die Mode (1,1,0) auf der 10×11-Fläche, in der Standardterminologie der Raumakustik eine tangentielle Mode, gilt

$$f_{110} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1/10^2 + 1/11^2)} = \nu_0 \cdot \sqrt{221/110}.$$

$$f_{110} \approx 44,265864853 \text{ Hz (nominal).}$$

Die Zahl 221 entsteht hier zwingend aus $10^2 + 11^2$. Sie ist der Wurzelinhalt der Flächenmode, nicht der räumlichen Diagonalmode.

Für die Mode (1,1,1), eine schräge Mode (englisch oblique), gilt dagegen

$$f_{111} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1/10^2 + 1/11^2 + 1/12^2)} = \nu_0 \cdot \sqrt{10981/660}.$$

$$f_{111} \approx 52,004690049 \text{ Hz (nominal).}$$

Hier ist 10981 die Quadratsumme des Kofaktorvektors:

$$10981 = 55^2 + 60^2 + 66^2 = 61^3 - 60^3.$$

Der dimensionslose Faktor der 52-Hz-Modellmode ist die durch 660 geteilte euklidische Länge des dreistimmigen Achsenakkords. Ihre Nähe zu der runden Zahl 52 ist nicht der Satz; der Satz ist die exakte Wurzelform.

IV.4 Interne Schließungsrelationen

Ein guter Fingerabdruck enthält Prüfwerte. Im idealen Rechteckmodell müssen zusammengesetzte Moden quadratisch aus den axialen Grundmoden schließen.

$$f_{110}^2 = f_{100}^2 + f_{010}^2,$$

$$f_{101}^2 = f_{100}^2 + f_{001}^2,$$

$$f_{011}^2 = f_{010}^2 + f_{001}^2,$$

$$f_{111}^2 = f_{100}^2 + f_{010}^2 + f_{001}^2.$$

Die drei axialen Moden liefern außerdem drei getrennte, achsenspezifische Schätzer desselben Skalenfaktors:

$$\hat{v}_{0,x} = 10f_{100}, \quad \hat{v}_{0,y} = 11f_{010}, \quad \hat{v}_{0,z} = 12f_{001}.$$

Erst wenn diese Schätzer innerhalb der vorab festgelegten Unsicherheit übereinstimmen, dürfen die Flächen- und Raummoden mit demselben $\hat{v}_0$ vorhergesagt werden. Jede nachträgliche Einzelfrequenzanpassung wäre ein Scheitern des Modells.

Ist c vor Ort unabhängig gemessen, kann dieselbe Relation als inverse Metrologie nach q aufgelöst werden:

$$q_{10} = c/(20f_{100}), \quad q_{11} = c/(22f_{010}), \quad q_{12} = c/(24f_{001}).$$

Die drei Werte müssen im idealen Modell dieselbe effektive Längeneinheit liefern.

IV.5 Nominale Frequenzregister der Primärstruktur

Das Register enthält keine Wunschziele, sondern vorab berechnete Folgen derselben Geometrie. Die vollständige maschinenlesbare Liste bis 120 Hz steht in der Begleitdatei Frequenzregister 1.0.

Mode	exakte Frequenzform	nominal Hz	Einordnung
(0,0,1)	$v_0/12$	27,295073	axial 12
(0,1,0)	$v_0/11$	29,776443	axial 11
(1,0,0)	$v_0/10$	32,754087	axial 10
(0,1,1)	$v_0\sqrt{265}/132$	40,393781	Flächenmode 11×12
(1,0,1)	$v_0\sqrt{61}/60$	42,636267	Flächenmode 10×12
(1,1,0)	$v_0\sqrt{221}/110$	44,265865	221-Flächenmode 10×11
(1,1,1)	$v_0\sqrt{10981}/660$	52,004690	räumliche Diagonalmode
(0,0,2)	$v_0/6$	54,590145	zweite Achse 12
(0,2,0)	$2v_0/11$	59,552886	zweite Achse 11
(2,0,0)	$v_0/5$	65,508175	zweite Achse 10
(1,2,1)	$v_0\sqrt{21781}/660$	73,242047	sekundärer 73-Hz-Kandidat

Die drei axialen Werte, f_{110} und f_{111} bilden das Primärregister. Höhere Moden wie (1,2,1) sind sekundär, weil die Modendichte mit der Frequenz rasch wächst.

IV.6 Sensitivität: Warum 52 nicht exakt 52 sein muss

Absolute Hertzwerte wandern gemeinsam, wenn sich Schallgeschwindigkeit oder Maßskala ändern. Diese Beweglichkeit ist kein Fehler, sondern die direkte Folge des Eichprinzips.

$$f_{\text{real}} = f_{\text{nominal}} \cdot (c/c_0) \cdot (q_0/q) \text{ mit } c_0=343 \text{ m/s und } q_0=\pi/6 \text{ m.}$$

Bei festem $q=\pi/6$ m und c zwischen 340 und 346 m/s wandert die nominelle f_{111} -Mode ungefähr von 51,550 Hz bis 52,460 Hz; f_{110} wandert von 43,879 Hz bis 44,653 Hz. Alle dimensionslosen Verhältnisse bleiben unverändert.

Darum lautet die vorregistrierbare Aussage nicht „Wir müssen exakt 52,000 Hz finden“. Sie lautet: „Ein gemeinsames, aus Maßen und Luftzustand berechnetes v_0 muss die gesamte räumlich identifizierte Modenfamilie erklären.“

IV.7 Zwei Frequenzsysteme, zwei Zuständigkeiten

Das Uhrwerk besitzt einen physischen Frequenzzweig und einen symbolischen Newton-/Grant-Port. Beide können künstlerisch zusammengeführt werden; wissenschaftlich dürfen sie nicht verwechselt werden.

System	Generator	Aussage	Status
physisches Raumsystem	Geometrie, q , c und Randbedingungen	Eigenmoden $f_n = v_0\sqrt{Q_n}$	prinzipiell messbar
Newton-/Grant-System	$5/4 \rightarrow 63/50$; $63^3 - 2 \cdot 50^3 = 47$	432,081216 als rationale Kubus-Sonifikation	mathematisch erklärt, keine Kammermode

Der Newton-Kantensatz aus III.6.4 erklärt, warum die erste Korrektur am Punkt $d=5$ exakt $1/10^2$ beträgt. Die Zahl 432,081216 bleibt dadurch interessant – aber als Klangport einer rationalen Annäherung an $\sqrt[3]{2}$, nicht als universelle Naturkonstante oder empirisch bestätigte Resonanz.

IV.8 Ergebnis: Fingerabdruck statt Einzelton

Die Frequenzschicht dieser Arbeit kann auf einen Satz verdichtet werden:

Die Geometrie 10×11×12 erzeugt ein dimensionsloses Modensystem, dessen Achsenakkord 55:60:66 seinen eigenen Raum zurückliest; ein einziger Skalenfaktor ν_0 übersetzt dieses System in Hertz, und interne Quadratrelationen prüfen, ob alle Teile wirklich zusammengehören.

Das ist praktisch stärker als eine einzelne Frequenz. Es liefert ein Muster, das vor der Messung vollständig angegeben werden kann und an mehreren getrennten und gemeinsam geforderten Merkmalen zugleich scheitern darf.

Teil V • Von der Theorie zur Messfrage

Dieser Teil berichtet keine Messresultate. Er verdichtet das prospektive Prüfprogramm auf die Entscheidungen, die für den Hauptband notwendig sind. Das vollständige technische Design steht im separaten „Messprotokoll M1–M4 zum Uhrwerk der Fünf“, welches auf Anfrage gesendet werden kann.

V.1 Die eine physikalische Frage

Bewahrt die reale Königinnenkammer einen hinreichend vollständigen Teil des vorher festgelegten dimensionslosen Fingerabdrucks, wenn Geometrie, Luftzustand und Randbedingungen ohne nachträgliches Zielschieben berücksichtigt werden?

Das Idealmodell besitzt nur einen absoluten spektralen Skalenparameter $\nu_0=c/(2q)$. Die Prüfung sucht deshalb nicht nach einer runden Einzelzahl, sondern nach einem ganzen System, das mit demselben ν_0 ausgerichtet werden kann.

V.2 Die Modellleiter M0–M4

Jede Stufe fügt genau die Physik hinzu, die in der vorherigen fehlt. So wird sichtbar, an welcher Naht der Fingerabdruck erhalten bleibt oder zerbricht.

Stufe	Modell	Entscheidende Aufgabe
M0	dimensionslose Ganzzahlstruktur	Sätze, Verhältnisse und Register einfrieren
M1	idealer schallharter Quader 10×11×12	analytische Referenz und Schließungsrelationen
M2	Satteldachraum mit Nische	prüfen, was die reale Grundform verändert
M3	scanbasierter Einzelraum	Steinlage, Fugen und Öffnungen einbeziehen
M4	gekoppelter Raum mit Zugängen	Transferwege und mögliche Kopplung testen
Messung	In-situ-Impulsantworten	Simulation und räumliche Daten gemeinsam prüfen

V.3 Die gemeinsame Signatur

Die primäre Signatur verbindet Frequenz und Raumform. Zuerst müssen drei axial identifizierte Moden denselben Skalenfaktor liefern:

$$10f_{100} = 11f_{010} = 12f_{001} = \nu_0$$

Daraus folgen ohne weitere Anpassung die Flächen- und Raumrelationen:

$$f_{110}^2 = f_{100}^2 + f_{010}^2, \quad f_{111}^2 = f_{100}^2 + f_{010}^2 + f_{001}^2$$

Ein belastbarer Befund verlangt zusätzlich die vorhergesagte räumliche Modenform, konsistente Phase, reproduzierbare Güte beziehungsweise Abklingzeit und passende Transferfunktionen zwischen Quellen- und Empfängerpositionen. Ein Peak ohne diese Begleitmerkmale zählt nicht.

V.4 Vorregistrierte Entscheidung

Vor der Datensichtung werden Geometrieversion, Materialannahmen, Luftzustand, Modenregister, Primärendpunkte, Toleranzen, Ausschlussregeln und Vergleichsmodelle eingefroren. Trainingsdaten dürfen der Modellkalibrierung dienen; die endgültige Bewertung erfolgt auf zurückgehaltenen Prüfdaten.

Die Anwendung gilt als gescheitert, wenn jede Mode einen eigenen Regler benötigt, wenn die quadratischen Schließungsrelationen in M2–M4 verschwinden, wenn räumliche Eigenformen nicht übereinstimmen oder wenn Kontrollgeometrien dieselbe Güte ohne die behauptete Struktur erreichen. Auch ein negatives Ergebnis wird vollständig berichtet.

Der stärkste Satz der Messbrücke lautet daher: Nicht die Nähe zu 52 Hz entscheidet. Entscheidend ist, ob ein vorab festgelegtes System aus Verhältnis, Form, Phase, Dämpfung und Übertragung mit einem gemeinsamen physikalischen Maßstab trägt.

V.5 Technisches Beiwerk

Das separate Messprotokoll M1–M4, enthält Eingangsdaten, Solver- und Diskretisierungsregeln, Quellen- und Mikrofonraster, Blindung, Unsicherheitsläufe, Abbruchregeln und Berichtsstandards. Das Frequenzregister 1.0 und das symbolische Audit werden unverändert als datierbare Begleitdateien geführt.

Damit endet der Hauptband nicht mit einer behaupteten Antwort des Steins, sondern mit einer fairen Frage, die der Stein tatsächlich verneinen kann.

Epilog · Was das Uhrwerk bedeuten könnte

Diese Arbeit begann mit der Hoffnung auf einen **besonderen Ton**. Sie endet mit einer präziseren Entdeckung: **einer Ordnung**, die ihre Sprache wechselt, ihre Herkunft zurückliert und erst danach durch einen einzigen Regler hörbar wird.

Im Reich der Algebra erscheint sie als Cohn-Adresse, Markov-/Pell-Schnitt und Paar symmetrischer Matrizen. Im Komplexen wird sie zu $2+i$; in der Zahlgeometrie zu $5^3=2^2+11^2$. Bei Euklid wird sie zum Dreieck **48:55:73**, im Raum zum Quader **10×11×12**, im idealen Klangmodell zum selbstdekodierenden Verhältnis **55:60:66**. Die **221-Flächenmode** und die **10981-Raummode** sind **keine** zusätzlichen Wunder, sondern kontrollierte Auslesungen derselben Struktur.

Mutig gelesen ist **die Fünf** darin keine magische Zahl. **Sie ist ein Scharnier**. An ihr treffen Richtung und Drehung, Kubusnorm und Quaderadresse, Dreieck und Raum. Die Fünf wirkt nicht, weil sie oft vorkommt. Sie wirkt, weil sie an einer präzisen Stelle die Zahl der Möglichkeiten auf **eins** senkt.

Vielleicht war die Suche nach der Göttlichen Universalfrequenz deshalb von Anfang an zu eng gefasst. Eine absolute Frequenz gehört immer zu Maßstab, Medium und Randbedingung. Das Universelle kann daher nicht ohne Weiteres eine Hertzzahl sein. Zäher ist die dimensionslose Ordnung: Sie kann ihre Darstellung wechseln, während ein einziger Eichparameter lediglich ihre absolute Tonhöhe festlegt.

Damit verschiebt sich auch der Blick auf Gizeh. Die Pyramide wäre dann nicht zwingend ein Instrument, das eine geheime Note spielt. Sie könnte, falls die Übereinstimmungen gewollt sind, eher einer **steinernen Partitur** gleichen: einer Architektur, in der Maß, Diagonale, Fläche und Raum dieselbe Ordnung in verschiedenen Registern anschlagen. Das ist eine kühne historische Deutung und keine bewiesene Tatsache.

Deshalb ist die Messung so wichtig. Bewahrt der reale Raum weder die gemeinsame v_0 -Skala noch Achsenverhältnis, Flächen- und Raumschließung, Modenformen, Phasen und Güten, dann fällt die

akustische Anwendung. Zeigt er diese Merkmale gemeinsam und reproduzierbar, wäre mehr gefunden als ein hübscher Peak: eine physische Spur eines vollständig vorab beschriebenen mathematischen Fingerabdrucks.

Das eigentliche Wagnis dieser Arbeit liegt darum nicht in der Behauptung, ein Geheimnis gelöst zu haben. Es liegt in der Weigerung, Staunen und Falsifizierbarkeit gegeneinander auszuspielen. Die Rechnung darf streng sein, und die Deutung darf weit reichen, solange jede Leserin und jeder Leser erkennen kann, wo der Beweis endet und die Vision beginnt.

Vielleicht ist die Universalfrequenz keine einzelne Frequenz, sondern die Kohärenz einer Adresse, die sich in Matrix, Norm, Dreieck, Raum und Verhältnis erhält und erst durch einen gemeinsamen Regler zu Klang wird.

Das Uhrwerk ist sichtbar. Seine historische Bedeutung ist offen. Seine akustische Stimme ist ungemessen. Aber die Frage ist jetzt so scharf gestellt, dass der Stein antworten kann.

Das letzte Wort hat der Stein, aber die Frage, die ihm gestellt wird, ist jetzt vollständig registrierbar.

Anhang A • Symbolübersicht

Hinweis zur Notation. Die Cohn-Ausgangsmatrizen erscheinen stets mit Argument als $A(2)$ und $B(2)$ und sind dadurch von der Dreiecksfläche A und der Quaderfamilie $B_s(t)$ mit Abstandsparameter s unterschieden. Der Gruppenkommutator der Fricke-Theorie und der additive Kommutator $GS - SG$ tragen nie dieselbe unbezeichnete Klammer im selben Kontext. Im akustischen Teil bezeichnet Q_n die dimensionslose quadratische Modalform und Q_G den Gütefaktor; die Referenzlänge heißt q , die Schallgeschwindigkeit c . In Teil III bezeichnet q den ganzzahligen Vervollständigungsparameter, in Teil IV die physikalische Referenzlänge; beide Bedeutungen treten nie im selben Rechenkontext auf.

Zeichen	Bedeutung
Q, C_2	Fibonacci- und Pell-Begleitmatrix
C_5	Cohn-Matrix $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
μ	reduzierter Cohn-Index beziehungsweise Markov-Bruch $2/5$
G, S	die beiden symmetrischen Vervollständigungen
v, J, Z	Richtung, Vierteldrehung und Rahmen $[v, Jv]$
Λ	von den Spalten von Z erzeugtes Untergitter
m, k	Euklid-Parameter mit $m > k > 0$
$d = m - k, t = m + k$	Differenz und Summe der Euklid-Parameter
s	Abstand der Quaderkanten von der Mitte t
a, b, h	Katheten und Hypotenuse des Euklid-Dreiecks
A, V, D	Dreiecksfläche, Quadervolumen und Raumdiagonale im dimensionslosen Modell
q	Referenzlänge des idealen Quaders
c	Schallgeschwindigkeit im jeweiligen Luftzustand
n_x, n_y, n_z	Modenindizes des Rechteckraums
M0-M4	Modellhierarchie von der Ganzzahlgeometrie bis zum gekoppelten Realraum
H_d	Balancematrix $((d+1, d), (d, d-1))$; bei $d=5$ die Karte $((6, 5), (5, 4))$
K_d	reduzierter Kofaktorvektor der Box $(2d, 2d+1, 2d+2)$
G_Q	Gram-Matrix $\text{diag}(100, 121, 144)$ des Referenzquaders

Zeichen	Bedeutung
v_0	gemeinsamer spektraler Skalenfaktor $c/(2q)$
f_{110}, f_{111}	221-Flächenmode beziehungsweise 10981-Raummode
$\hat{v}_0$	aus Messmoden geschätzter gemeinsamer Skalenfaktor

Anhang B • Rechenregister

Dieser Anhang bündelt die neuen exakten Identitäten und die nominalen M1-Werte. Sämtliche algebraischen Aussagen wurden mit rationaler beziehungsweise symbolischer Arithmetik gegengeprüft. Die Begleitdatei `Uhrwerk_2_3_6_Audit.py` reproduziert die algebraischen Kernassertionen, den lokalen 40-Modell-Vergleich und die nominalen M1-Werte und prüft das versiegelte Frequenzregister über seine SHA-256-Prüfsumme; `Frequenzregister_1_0.csv` enthält alle 55 M1-Moden bis 120 Hz.

Kern	exakte Identität	Status
Markov/Pell	$\det G = -1 \Leftrightarrow 1 + p^2 + q^2 = 3pq$; $\det S = -1 \Leftrightarrow (q-p)^2 - 2p^2 = 1$	exakt in Definition A
Selbstindizierung	$C_5 = 3vv^T + J$; $\text{tr}(C_5)/3 = \ v\ ^2 = N(2+i) = 5$	exakt
Normpunkt	$(2+i)^3 = 2+11i$; $5^3 = 2^2 + 11^2$	exakt, primitive Normklasse
Selektor	$(d, t, s) = (5, 11, 1)$; $48:55:73$; $10 \times 11 \times 12$	exakt in der Quaderfamilie
Kofaktordecoder	$K_5 = (55, 60, 66)$; Paardifferenz = PaarggT	exakt
Euklid/Kubus	$11^2 + 60^2 = 61^2$; $10981 = 61^3 - 60^3$	exakt
Gram	$\chi(u) = u^3 - 365u^2 + 4 \cdot 10981u - 1320^2$	exakt
Eichung	$v_0 = c/(2q)$; $f_n = v_0 \cdot Q_n$	exakt für M1
Newton-Port	$5/4 \rightarrow 63/50$; $63^3 - 2 \cdot 50^3 = 47$	exakt, symbolischer Port

B.1 Nominalwerte und Sensitivität

Nominalkonvention: $q = \pi/6$ m, $c = 343$ m/s, $v_0 = 1029/\pi$ Hz. Die Werte sind auf sechs Dezimalstellen gerundet.

Größe	Wert
v_0	327,540873 Hz
f_{001}	27,295073 Hz
f_{010}	29,776443 Hz
f_{100}	32,754087 Hz
f_{110}	44,265865 Hz
f_{111}	52,004690 Hz
f_{121}	73,242047 Hz
f_{110} bei $c = 340 \dots 346$ m/s	43,878700...44,653030 Hz
f_{111} bei $c = 340 \dots 346$ m/s	51,549839...52,459542 Hz

B.2 Maschinenlesbarer Audit

Das Audit-Skript verwendet sympy für die exakten Identitäten und die Standardbibliothek für die nominellen Frequenzen. Es prüft unter anderem die Markov-/Pell-Formen, Cohn-Rückbau, Normpunkt, Kofaktor-Selbstdecoder, Gram-Polynom, Newton-Kantensatz und die vollständige Modenliste bis 120 Hz. Die Dateien sind Bestandteil des Begleitpakets dieser Ausgabe.

Literatur und weiterführende Quellen

Die Quellen sind mit Fachpräfixen zitiert: M für Mathematik, B für Begleittexte der Forschungsreihe, G für Gizeh und Vermessung, H für Wissenschaftsgeschichte und A für Akustik. Ein Verweis wie [M3] bezeichnet im gesamten Band dieselbe Quelle.

Mathematik

[M1] Aigner, M. *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture: A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings*. Springer, 2013. DOI 10.1007/978-3-319-00888-2.

[M2] Springborn, B. "The Worst Approximable Rational Numbers." *Journal of Number Theory* 263 (2024), 153-205. DOI 10.1016/j.jnt.2024.04.013.

[M3] Veselov, A. P. "Markov Fractions and Cohn Matrices." arXiv:2604.17401, Version 1, 19. April 2026.

[M4] Evans, S.; Jouteur, P.; Morier-Genoud, S.; Ovsienko, V. "On q-Deformed Markov Numbers: Cohn Matrices and Perfect Matchings with Weighted Edges." *Annals of Combinatorics* (2026). DOI 10.1007/s00026-026-00813-1.

[M5] Goldman, W. M. "The Modular Group Action on Real $SL(2)$ -Characters of a One-Holed Torus." *Geometry & Topology* 7 (2003), 443-486. DOI 10.2140/gt.2003.7.443.

[M6] Greenberg, Z.; Kaufman, D.; Wienhard, A. " SL_2 -like Properties of Matrices over Noncommutative Rings and Generalizations of Markov Numbers." *Advances in Mathematics* 482 (2025), 110556. DOI 10.1016/j.aim.2025.110556.

[M7] Latimer, C. G.; MacDuffee, C. C. "A Correspondence Between Classes of Ideals and Classes of Matrices." *Annals of Mathematics* 34(2) (1933), 313-316. DOI 10.2307/1968204.

[M8] Kocik, J. "Clifford Algebras and Euclid's Parametrization of Pythagorean Triples." *Advances in Applied Clifford Algebras* 17 (2007), 71-93. DOI 10.1007/s00006-006-0019-2.

Begleittexte der Forschungsreihe

[B1] Bohn, C. Die Grammatik der Fünf: Das Geheimnis zwischen Vier und Sechs. Publikationsfassung 1.0.1. BOHN AI Inc. Manuskript; Veröffentlichung vorgesehen für August 2026.

[B2] Bohn, C. Der Klang des ersten Schrittes: Über die Newton-Brücke von 5/4 zu 63/50. BOHN AI Inc., Juli 2026.

[B3] Bohn, C. Die zwei Stimmen der Fünf: Die Königinnenmatrix zwischen Gold und Silber. Publikationsfassung 1.0. BOHN AI Inc. Manuskript; Veröffentlichung vorgesehen für August 2026.

Gizeh und Vermessung

[G1] Petrie, W. M. F. *The Pyramids and Temples of Gizeh*. London: Field & Tuer; New York: Scribner & Welford, 1883.

[G2] Maragioglio, V.; Rinaldi, C. *L'Architettura delle Piramidi Menfite. Parte IV: La grande piramide di Cheope. 1-Testo, 2-Tavole*. Rapallo: Tipografia Canessa, 1965.

[G3] Harvard University. *Digital Giza / Giza Project*. Forschungs- und Quellenplattform. Zugriff am 16. Juli 2026.

Geschichte altägyptischer Mathematik

[H1] Imhausen, A. *Mathematics in Ancient Egypt: A Contextual History*. Princeton University Press, 2016.

[H2] Rossi, C. *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*. Cambridge University Press, 2004. DOI 10.1017/CBO9780511550720.

[H3] Robins, G.; Shute, C. *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. London: British Museum Publications, 1987.

Akustik, Messung und Numerik

[A1] Morse, P. M.; Ingard, K. U. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968.

[A2] Kuttruff, H. *Room Acoustics*. 6. Auflage. CRC Press, 2017.

[A3] ISO 3382-2:2008. *Acoustics - Measurement of Room Acoustic Parameters - Part 2: Reverberation Time in Ordinary Rooms*. Mit Technical Corrigendum 1:2009.

[A4] ISO 18233:2006. *Acoustics - Application of New Measurement Methods in Building and Room Acoustics*.

[A5] Farina, A. "Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine Technique." 108th AES Convention, Convention Paper 5093, Paris, 2000.

[A6] Thompson, L. L. "A Review of Finite-Element Methods for Time-Harmonic Acoustics." *Journal of the Acoustical Society of America* 119(3) (2006), 1315-1330. DOI 10.1121/1.2164987.

[A7] Botteldooren, D. "Finite-Difference Time-Domain Simulation of Low-Frequency Room Acoustic Problems." *Journal of the Acoustical Society of America* 98(6) (1995), 3302-3308. DOI 10.1121/1.413817.

[A8] Smith, C. H.; Beibin, S. "Resonant Chambers: Comparative Impulse-Response Study Inside the Great Pyramid of Khufu." *Proceedings of EVA London 2026*, 199-203. DOI 10.14236/ewic/EVA2026.35.