

Die Grammatik der Fünf

Das Geheimnis zwischen Vier und Sechs



Christopher Bohn · BOHN AI Inc. · August 2026

Prolog · Die fünfte Karte, die es nicht gibt

Gesucht sind positive ganze Zahlen a und b mit $ab=24$. Vier Karten liegen bereits auf dem Tisch: $(24,1)$, $(12,2)$, $(8,3)$ und $(6,4)$. Versuchen Sie, bis auf Vertauschung ein fünftes positives Faktorenpaar zu finden.

Warum gerade 24? Weil $24=5^2-1$ ist. Die Zusammenfassung zeigt anschließend, warum genau diese Gleichung aus der Determinantenbedingung entsteht.

Es gibt keines. Diese Unmöglichkeit ist der erste Haken der Arbeit: Die Familie ist vollständig, bevor irgendeine Karte als Gold, Silber oder Balance gedeutet wird. Aus einer Zahlensuche wird ein abgeschlossenes Kartenfach.

Was diese Arbeit ist

Diese Arbeit untersucht eine endliche Familie symmetrischer 2×2 -Ganzzahlmatrizen mit ausschließlich positiven Einträgen. Festgehalten werden derselbe positive Offdiagonaleintrag d in beiden Offdiagonalpositionen und die Determinante -1 . Daraus entsteht eine vollständige Schale von Faktorklassen. Für ungerades d besitzt sie ein eindeutiges Paar, dessen Summe singulär wird. Ein gemeinsamer ganzzahliger Basiswechsel führt dieses Paar auf eine simultane Normalform zurück und zeigt, dass mehrere zunächst getrennte Befunde verschiedene Ansichten desselben Systems sind.

Der stärkste Claim. Die Wahl $\det M = -1$ ist dreifach überbestimmt: Negative Unimodularität, minimale positive Quadratdiskriminante in der rational gespaltenen Familie und unmittelbare Nachbarstimmen führen jeweils auf $\kappa=1$. Innerhalb der ungeraden Familie fixieren Vierklassigkeit, bereits eine metallische Zentralstimme und die B-Kind-Ausrichtung jeweils denselben Wert $d=5$.

Was diese Arbeit nicht behauptet

Sie beweist keine altägyptische Kenntnis moderner Matrixsprache, keine historische Bauabsicht, keine „heilige“ Frequenz und keine medizinische Wirkung. Alle mathematischen Hauptsätze gelten ohne Gizeh, Königselle oder Hertz. Raum und Klang erscheinen erst in einem Anwendungsanhang und dürfen den vorgelagerten Satz nicht rückwärts beweisen.

Evidenzleiter

Jede Aussage bleibt in ihrer eigenen Schicht



Ein Klang kann keinen Satz beweisen; ein Satz kann keine historische Absicht beweisen.

Abbildung 1 · Evidenzleiter. Satz, Korollar, Modell, Sonifikation und Messung bleiben verschiedene Aussagearten.

Zusammenfassung

Innerhalb der ungeraden Determinantenschalen ist **d=5** der einzige Punkt, an dem Vierklassigkeit, bereits eine metallische Zentralmatrix und die ausgewiesene Barning-B-Kind-Ausrichtung zusammenfallen. Die Arbeit untersucht deshalb nicht, wie viele bemerkenswerte Beziehungen sich zur Zahl fünf finden lassen. Sie stellt die umgekehrte Frage:

Gibt es eine kleine mathematische Regel, in der mehrere scheinbar verschiedene Eigenschaften dieselbe Fünf notwendig auswählen?

Der Ausgangspunkt ist eine einfache Zahlenkarte mit vier Feldern. In der Mitte steht zweimal dieselbe Zahl d ; nur die beiden Diagonalzahlen a und b dürfen wechseln. Über Kreuz kann die Karte auf zwei Arten gelesen werden. Die Minusprobe **$ab-d^2$ heißt Determinante**, die Plusprobe **$ab+d^2$ heißt Permanente**. Wir verlangen zunächst, dass die Minusprobe genau -1 ergibt.

Diese Wahl ist nicht bloß deshalb interessant, weil sie "schöne" Resultate liefert. Sie ist der kleinste negative ganzzahlige Fall, der zugleich ohne Informationsverlust im Ganzzahlgitter arbeitet und die zugehörige quadratische Form in die unmittelbaren Nachbarstimmen $d-1$ und $d+1$ zerlegt.

Bei **d=5** sind das wörtlich die Stimmen **vier und sechs**.

Für $d=5$ wird die Grundgleichung besonders anschaulich: $ab=5^2-1=24$. Die Zahl 24 besitzt bis auf Vertauschung genau vier positive Faktorenpaare: $24 \cdot 1$, $12 \cdot 2$, $8 \cdot 3$ und $6 \cdot 4$. Daraus entstehen genau vier Karten. Beispielsweise gilt $8 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = -1$ und $12 \cdot 2 - 5 \cdot 5 = -1$. Es wurden also nicht vier passende Beispiele ausgewählt; unter den gesetzten Regeln existiert keine fünfte Karte.

Für jedes ungerade d besitzt die Schale ein algebraisch ausgezeichnetes Paar. Es entsteht aus den benachbarten Teilern $(d-1)/2$ und $(d+1)/2$. Bei $d=5$ sind dies zugleich die beiden mittleren Karten der vierklassigen Schale, mit den Diagonalen 8 und 3 sowie 12 und 2. Jede ist für sich vollständig umkehrbar. Legt man beide jedoch mit gleichem Gewicht übereinander, wird eine Richtung vollständig flachgedrückt. Mathematisch heißt das: Die Summe ist singulär und besitzt Rang eins.

Ein bestimmter ganzzahliger Wechsel des Koordinatengitters macht sichtbar, dass mehrere zunächst verschiedene Befunde dasselbe Ereignis beschreiben. Die gemeinsame Nullrichtung der Formen, die singuläre Summe, das lineare Matrizenbüschel (matrix pencil) $\det(\lambda L_d + \mu R_d) = -(\lambda - \mu)^2$ und die parabolische Scherung sind keine vier unabhängigen Wunder. Sie sind vier Ansichten derselben Normalform.

Die gleichen Karten besitzen außerdem eine klassische Landkarte. Im Conway-Hatcher-Topographen stehen a und b als Werte in zwei benachbarten Regionen, während die Kante dazwischen das Label $2d$ trägt. Die Bedingung $ab-d^2=-1$ wird dort zu der einen Gleichung $\Delta=(2d)^2-4ab=4$. Die Schale ist daher kein isoliertes neues Gelände, sondern ein Festlabel-Querschnitt durch die bekannte Topographie der Diskriminante 4.

Erst danach tritt **die besondere Rolle der Fünf** hervor. Unter allen ungeraden Schalen ist $d=5$ die einzige mit genau vier Karten. Es genügt, dass nur eine der beiden ausgezeichneten Zentralkarten zu einer klassischen ganzzahligen Zahlenmaschine gehört, einer Matrix, die bei wiederholter Anwendung Fibonacci- oder Pell-Zahlen erzeugt. Bereits eine einzige solche Stimme erzwingt $d=5$.

Am Lösungspunkt erscheint automatisch auch die zweite: **Q^5 als Goldmatrix und C_2^3 als Silbermatrix**.

Die Karten können noch in eine weitere Sprache übersetzt werden. Liest man ihre Diagonalzahlen als die beiden Eltern in Euklids Rezept für rechtwinklige Dreiecke, erzeugen 8 und 3 beispielsweise $2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$, $8^2 - 3^2 = 55$ und $8^2 + 3^2 = 73$. So entsteht das pythagoreische Tripel **48:55:73**. Andere Karten derselben Schale erzeugen unter anderem 12:35:37 und 5:12:13. Ein allgemeiner Reduktionssatz erklärt, wann ein Rohtripel gekürzt werden muss.

Der Kontrollfall $d=7$ zeigt, warum dies kein Automatismus ist. Auch die Sieben besitzt eine gültige ungerade Schale und ein Zentralpaar, aber sie hat fünf statt vier Klassen und keine metallische Zentralstimme. Die Grammatik erzeugt also nicht überall Gold und Silber; sie zeigt ebenso deutlich, warum nahe Fälle ausscheiden.

Theoretisch ist die Arbeit eine Klassifikations-, Normalformen- und Äquivalenzarbeit. Praktisch liefert sie ein endliches Verfahren: Für jedes d können alle Karten erzeugt, Balance und Zentralpaar bestimmt, metallische Stimmen gesucht, pythagoreische Tripel berechnet und ihre Familienadressen geprüft werden. Man kann sich die Fünf deshalb wie einen Bahnhof vorstellen, an dem mehrere bereits bekannte Linien auf demselben Bahnsteig eintreffen: Teilerarithmetik, Matrixalgebra, Fibonacci/Pell und pythagoreische Genealogie.

Raum, Gizeh und Klang erscheinen ausschließlich als spätere Anwendungen. Sie können die Grammatik veranschaulichen, sonifizieren und in Messfragen übersetzen. Sie beweisen jedoch keinen der algebraischen Sätze. Ebenso bleibt die weltweite Neuheit der genauen Satzverbindung bis zur vollständigen Fachdatenbanksuche und externen Begutachtung offen.

Leitsatz. Zwischen Vier und Sechs liegt in dieser Grammatik nicht nur eine Zahl. Dort liegt der einzige ungerade Punkt, an dem Teiler, Matrizen, Gold, Silber und pythagoreische Vererbung zu verschiedenen Stimmen derselben Struktur werden.

Die Idee in einfachen Worten

Man stelle sich ein Kartenfach vor. Auf jeder Karte stehen vier Zahlen. Die beiden mittleren Plätze tragen dieselbe Zahl d ; oben links und unten rechts liegen zwei Faktoren von d^2-1 . Sobald d feststeht, ist das Kartenfach endlich. Keine zulässige Karte darf später hinzugefügt oder weggelassen werden.

Für $d=5$ lautet das Fach: $24 \cdot 1$, $12 \cdot 2$, $8 \cdot 3$ und $6 \cdot 4$. Zwei Karten liegen in der Mitte. Ihre Summe verhält sich wie zwei transparente Folien, die sich in einer Richtung gegenseitig auslöschen, in der anderen aber gemeinsam ein klares Bild hinterlassen.

Eine der mittleren Karten ist die fünfte Potenz der Fibonacci-Matrix, die andere die dritte Potenz der Pell-Matrix. Noch überraschender ist die Richtung des Satzes: Man braucht nicht beide zu suchen. Findet man innerhalb der Zentralfamilie nur eine metallische Stimme, ist $d=5$ bereits erzwungen und die zweite folgt automatisch.

Schließlich werden die Diagonalen zu Eltern rechtwinkliger Dreiecke. Die Matrix enthält das Dreieck also nicht als fertiges Bild, sie enthält dessen Bauanleitung. Im Stammbaum der pythagoreischen Tripel erhalten die Ausgaben feste Adressen und notwendige Geschwister, die als Kontrolle sichtbar bleiben.

Praktisches Mini-Beispiel: Nehmen Sie die Goldkarte mit den Diagonalen 8 und 3. Euklids Rezept liefert 48, 55 und 73. Drei Multiplikationen genügen, um aus der Matrix ein rechtwinkliges Ganzzahldreieck zu erzeugen.

Technisches Abstract

Die Arbeit bündelt keine voneinander unabhängigen Treffer. Sie charakterisiert einen einzigen Fixpunkt in mehreren klassischen Sprachen und legt die Abhängigkeiten zwischen diesen Beschreibungen offen.

Für $d \geq 2$ sei S_d die Menge symmetrischer Ganzzahlmatrizen $M = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$ mit ausschließlich positiven Einträgen und $\det M = -1$, modulo Koordinatentausch. Dann gilt $ab = d^2 - 1$, sodass S_d durch die Faktorraare von $d^2 - 1$ vollständig klassifiziert ist. Alle Klassen besitzen in der festgelegten Basis

Permanente $2d^2 - 1$, Formdiskriminante 4 und eine lineare Faktorisierung mit Koeffizienten $d - 1$ und $d + 1$. Unter den Klassen ist $H_d = \begin{pmatrix} d+1 & d \\ d & d-1 \end{pmatrix}$ eindeutig spur- und differenzminimal. Für ungerades $d \geq 3$ existiert genau ein verschiedenes Klassenpaar L_d, R_d mit singulärer Summe. Mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ gelten die beiden expliziten Normalformen:

$$B^T L_d B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & (d+1)/2 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad B^T R_d B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (d-1)/2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen Rang-eins-Summe, $\det(\lambda L_d + \mu R_d) = -(\lambda - \mu)^2$ und ein relativer Operator, der ganzzahlig zu $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugiert ist. Für ungerades $d \geq 3$ sind $d=5$, $|S_d|=4$, die Darstellbarkeit von L_d oder R_d als positive Potenz einer ganzzahligen metallischen Begleitmatrix und die B-Kind-Ausrichtung der linken Zentralmatrix äquivalent. Unter den nichttrivialen Quadratpermanenzschalen charakterisiert zusätzlich die Pell-A-Kind-Ausrichtung denselben Wert $d=5$. Die $d=5$ -Schale besitzt vier Koordinatenklassen, aber unter $GL_2(\mathbb{Z})$ nur zwei intrinsische Gittertypen. Jede Schalenklasse erzeugt ein Euklid-Rohtripel mit festem Bein $2(d^2 - 1)$; ein Reduktionssatz bestimmt den primitiven Faktor. Ein symbolischer Audit und eine separat implementierte Ganzzahl-Enumeration prüfen die formulierten Identitäten sowie die deklarierten Fensterfälle.

Klassisch entspricht $Q_M(x,y) = ax^2 + 2dxy + by^2$ einer lokalen Conway-Hatcher-Kantenkonfiguration mit Regionswerten a, b , Kantenmarkierung $|h|=2d$ und Diskriminante 4. Für $d=5$ zerfallen die vier Konfigurationen in den primitiven ungeraden Trägertyp $x^2 - y^2$ und den imprimitiven geraden Typ $2xy$. Diese Übersetzung verengt den Neuheitskandidaten auf die gerichtete Fortsetzung zu Zentralpaar, gemeinsamer Normalform, metallischer Fixierung und pythagoreischer Genealogie.

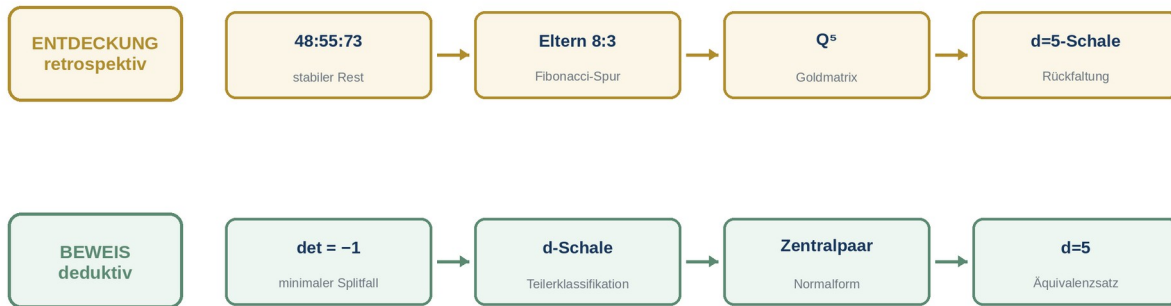
MSC 2020. Primär: 11C20, 11E16. Sekundär: 11B39, 11D09, 15A22, 15B36.

Entdeckungsweg und Beweisweg

Die historische Entdeckungsrichtung und die logische Beweisrichtung sind verschieden. Der frühere Weg begann beim stabilen Tripel 48:55:73, führte zu den Euklid-Eltern $(8, 3)$, zur Fibonacci-Matrix Q^5 und erst danach zur vollständigen Schale. Der mathematische Haupttext geht umgekehrt vor: Er beginnt bei der Determinante, klassifiziert die ganze Familie, bestimmt das Zentralpaar und lässt $d=5$ erst am Ende als Äquivalenzpunkt entstehen.

Zwei Richtungen

Entdeckungsweg und Beweisweg dürfen nicht verwechselt werden



Der Haupttext folgt der unteren Spur. Die obere Spur dokumentiert nur, wie die Frage historisch entstand.

Abbildung 2 · Entdeckungsweg und Beweisweg. Die obere Spur ist retrospektiv; nur die untere Spur trägt den Satzstatus.

Was wurde gesetzt, und was folgt danach?

Stufe	Setzung	Zwingende Folge
1	symmetrische Ganzzahlmatrix mit positiven Einträgen, derselbe Offdiagonaleintrag d in beiden Offdiagonalpositionen, negative Determinante $-\kappa$	$ab = d^2 - \kappa$, endliche Faktorfamilie, sofern $d^2 > \kappa$
2	rationale lineare Spaltung verlangt	$\kappa = s^2$, Stimmen $d - s$ und $d + s$
3	unmittelbare Nachbarstimmen verlangt	$s = 1$, also $\kappa = 1$ und $\det = -1$
4	kanonische Orientierung $a \geq b$	eindeutige Balanceklasse
5	d ungerade	eindeutiges singuläres Zentralpaar
6	eine Zentralmatrix soll metallische Potenz sein	zwingend $d = 5$; Gold und Silber folgen gemeinsam
7	Diagonalen werden als Euklid-Eltern gelesen	Rohtripel mit festem ersten Bein
8	Raum- oder Klangabbildung wird deklariert	Modell- beziehungsweise Sonifikationsausgabe, kein neuer Beweis

Kontrollschalen: Was die Fünf wirklich auswählt

Bevor die allgemeine Theorie beginnt, lohnt der Vergleich mit nahen Fällen. Die Tabelle zeigt nicht nur Treffer, sondern ebenso wichtig die Ausfälle: Ein Zentralpaar existiert bei vielen ungeraden d , eine quadratische Permanente erneut bei $d=29$, und vier Klassen auch an zahlreichen geraden Stellen. Selektiv ist erst die präzise Überlagerung der Bedingungen.

d	d^2-1	Klassen	Zentralpaar	Permanente	metallische Zentralstimme	B-Kind?
3	8	2	ja	17	nein	nein
4	15	2	nein	31	nein	n/a
5	24	4	ja	$49=7^2$	ja, beide	ja
7	48	5	ja	97	nein	nein
29	840	16	ja	$1681=41^2$	nein	nein

So ist die Tabelle zu lesen: Die Sieben wird erstaunlich weit mitkommen: gültige Schale, Zentralpaar und singuläre Summenstruktur. Erst an Vierklassigkeit, Metallizität und B-Kind-Ausrichtung scheitert sie. $d=3$ zeigt, dass Zentralpaar allein nicht genügt; $d=29$ zeigt, dass Quadratpermanenz allein nicht genügt.

KAPITEL 1

Warum gerade Determinante -1 ?

Der minimale ganzzahlige Splitfall hinter den Stimmen Vier und Sechs

Bevor die Fünf ausgezeichnet wird, muss die härteste Willkürfrage beantwortet werden: Warum beginnt die Grammatik ausgerechnet mit $\det M = -1$? Eine Bedingung kann viele schöne Folgen haben und dennoch nachträglich gewählt sein.

Dieses Kapitel erweitert deshalb zunächst auf $\det M = -\kappa$. Nichtquadratische κ spalten rational gar nicht; größere Quadrate spalten, aber ihre Stimmen liegen weiter auseinander. Nur $\kappa=1$ stellt d unmittelbar zwischen $d-1$ und $d+1$. Die Auswahl von -1 wird damit selbst zum Satzgegenstand.

1 • Die allgemeinere $-\kappa$ -Familie

Bevor -1 ausgezeichnet wird, betrachten wir die größere Familie

$$M_{d,\kappa}(a,b) = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}, a,b,d,\kappa \in \mathbb{N}, \det M = -\kappa.$$

Dann gilt

$$ab = d^2 - \kappa.$$

Für $d^2 > \kappa$ ist die Familie mit positiven Einträgen erneut endlich. Zur Matrix gehört die binäre quadratische Form

$$q_M(x,y) = ax^2 + 2dxy + by^2.$$

Ihre Diskriminante ist

$$\Delta_q = (2d)^2 - 4ab = 4\kappa.$$

Die Determinante kontrolliert damit unmittelbar die Spaltbarkeit der Form.

2 • Wann entstehen zwei rationale Stimmen?

Eine binäre quadratische Form zerfällt über $\mathbb{Q}$ genau dann in zwei lineare Faktoren, wenn ihre Diskriminante ein rationales Quadrat ist. Für ganzzahliges $\kappa > 0$ bedeutet dies: κ muss selbst ein Quadrat sein. Schreibe

$$\kappa = s^2.$$

Dann folgt für $b > 0$ die exakte Faktorisierung

$$b q_M(x,y) = ((d-s)x + by)((d+s)x + by).$$

Die beiden Stimmen lauten also allgemein $d-s$ und $d+s$. Erst die Zusatzfrage nach den **unmittelbaren** Nachbarn von d zwingt $s=1$.

Warum gerade Determinante -1 ?

Die Wahl folgt aus einem allgemeineren $-k$ -Rahmen

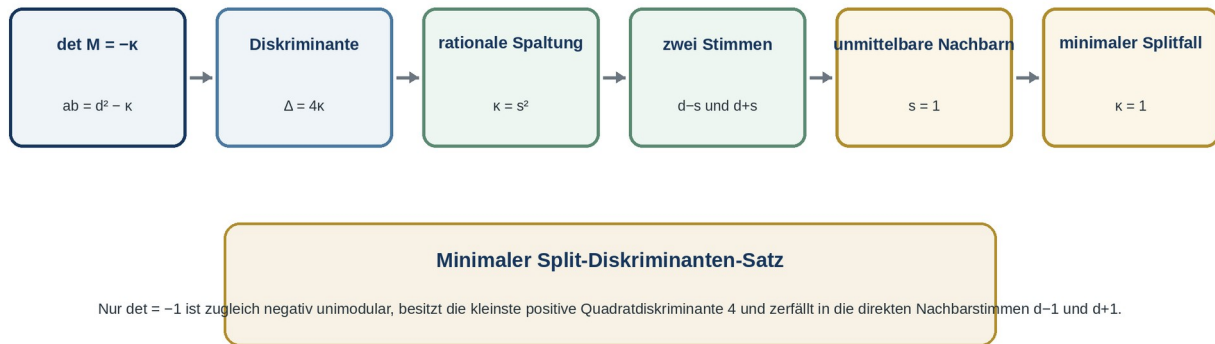


Abbildung 3 · Vom allgemeinen negativen Determinantenwert zum minimalen Splitfall.

Hauptsatz A · Dreifache Charakterisierung des minimalen Splitfalls. Für $\kappa \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent: (i) $\det M = -\kappa$ ist negativ unimodular; (ii) innerhalb der rational gespaltenen Familie besitzt die Form die kleinste positive Quadratdiskriminante 4; (iii) die linearen Stimmen sind die unmittelbaren Nachbarn $d-1$ und $d+1$. Jede Aussage gilt genau dann, wenn $\kappa=1$.

3 · Warum diese Begründung wichtig ist

Ohne den κ -Rahmen könnte $\det M = -1$ wie eine besonders ergiebige, aber nachträglich gewählte Bedingung erscheinen. Der stärkere Befund lautet nicht, dass drei unabhängige Filter gemeinsam auf $\kappa=1$ zeigen. Vielmehr ist der Minimalfall dreifach charakterisiert: Jede der folgenden präzisen Forderungen genügt bereits allein.

Negative Unimodularität bedeutet per Definition $\kappa=1$.

Die kleinste positive Quadratdiskriminante innerhalb der rational gespaltenen Fälle ist 4 und damit $\kappa=1$; rationale Spaltbarkeit allein lässt dagegen jedes Quadrat $\kappa=s^2$ zu.

Unmittelbare Nachbarstimmen bedeuten $s=1$ und daher erneut $\kappa=s^2=1$.

Der Titel „zwischen Vier und Sechs“ ist damit nicht nur eine Beobachtung des Spezialfalls $d=5$. Er ist die direkte Konsequenz des minimalen Splitfalls $\kappa=1$.

KAPITEL 2

Die Determinantenschale

Teilerklassifikation, schalenweite Konstanten und eindeutige Balance

Eine einzige Gleichung beendet eine scheinbar unendliche Suche. Sobald d und $\det M = -1$ feststehen, sind die Diagonalen nicht mehr frei: Sie müssen sich zu $d^2 - 1$ multiplizieren.

Aus einem offenen Matrixraum wird ein endlicher Katalog. Diese Endlichkeit ist mehr als Bequemlichkeit. Sie macht Vollständigkeit möglich: Jede zulässige Karte ist bekannt, bevor eine von ihnen Gold, Silber, Dreieck oder Klang genannt wird.

4 • Definition und Äquivalenzbegriff

Für $d \geq 2$ definieren wir die d -Schale

$$S_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{N}, ab = d^2 - 1 \right\} / \sim,$$

wobei

$$\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & d \\ d & a \end{pmatrix}$$

nur den Koordinatentausch bezeichnet. Dies ist bewusst nicht die volle -Kongruenz. Der Unterschied wird in Kapitel 5 ausdrücklich untersucht.

Hauptsatz B • Vollständiger Schalensatz. Bis auf Koordinatentausch besitzt jede Klasse genau die Form

$$M_r(d) = \begin{pmatrix} (d^2 - 1)/r & d \\ d & r \end{pmatrix},$$

wobei $r \mid (d^2 - 1)$ und $r \leq \sqrt{d^2 - 1}$. Umgekehrt gehört jede solche Matrix zur Schale.

5 • Vier schalenweite Konstanten

In der kanonischen Koordinatenbasis folgen ohne weitere Suche:

$$\det M_r = -1, \text{ per } M_r = 2d^2 - 1, \Delta_q = 4,$$

und

$$q_r(x, y) = \frac{((d-1)x + ry)((d+1)x + ry)}{r}.$$

Der Ausdruck „schalenweite Konstanten“ ist präziser als „vier Invarianten“: Determinante und Formdiskriminante besitzen echte Invarianzqualitäten, die Permanente ist dagegen eintrags- und basisbezogen.

6 · Klassenanzahl

Da $d^2 - 1$ zwischen $(d-1)^2$ und d^2 liegt, ist es für $d \geq 2$ kein Quadrat. Jeder positive Teiler besitzt daher einen verschiedenen komplementären Partner. Mit $\tau(n)$ für die Teileranzahl gilt

$$|S_d| = \frac{\tau(d^2 - 1)}{2}.$$

7 · Die eindeutige Balanceklasse

Unter allen orientierten Faktorpaaren $a \geq b$ ist das Nachbarpaar $(d+1, d-1)$ zugleich spurminimal und differenzminimal.

Hauptsatz C · Balance. Die Matrix

$$H_d = \begin{pmatrix} d+1 & d \\ d & d-1 \end{pmatrix}$$

ist die eindeutige Schalenklasse mit minimaler Spur und minimaler Diagonalendifferenz.

Alle Balanceklassen liegen auf der affinen Geraden

$$H_c = \begin{pmatrix} c+1 & c \\ c & c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det H_c = -1.$$

Bei $d=5$ enthält H_5 die drei verschiedenen Einträge 4:5:6. Diese Intervalllesart ist ein Korollar der Balanceklasse, kein zusätzlicher Selektor.

8 · Wie die Kontrollfälle zu lesen sind

Die Kontrollfälle verhindern drei Fehlinterpretationen. Ein Zentralpaar ist nicht speziell für die Fünf, denn jedes ungerade d besitzt eines. Eine quadratische Permanente ist ebenfalls nicht exklusiv, denn $d=29$ liefert bereits den nächsten Fall. Selektiv ist die präzise Überlagerung mehrerer Bedingungen.

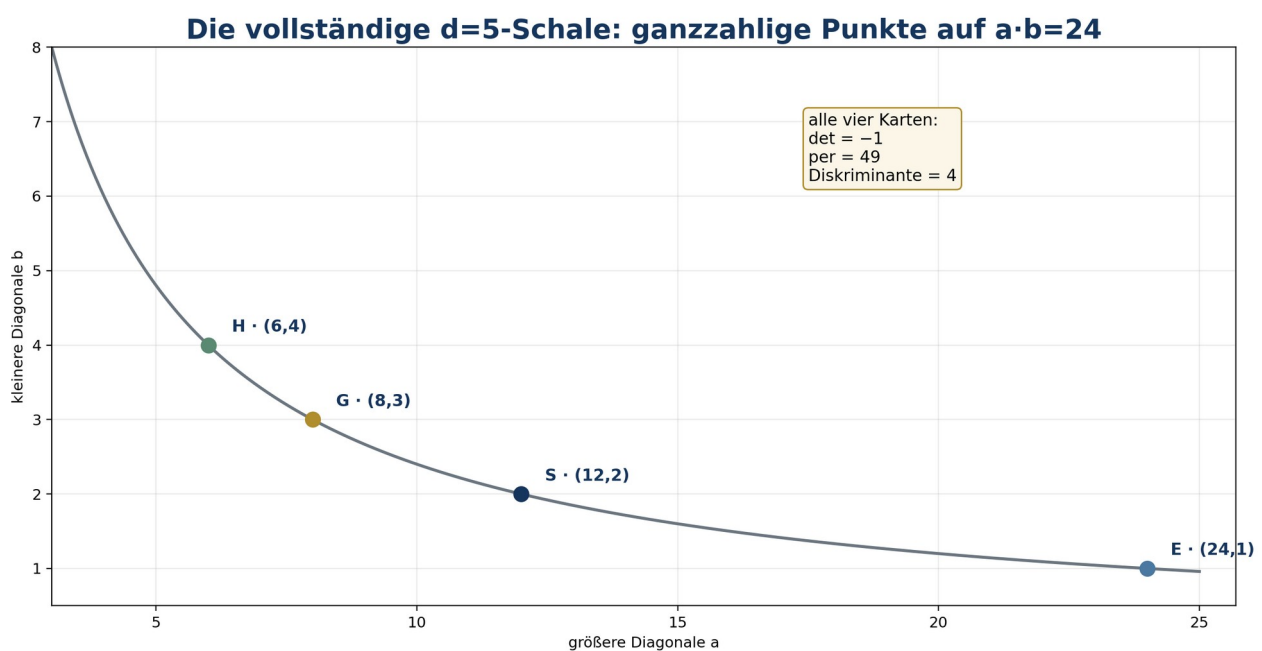


Abbildung 4 · Die vollständige $d=5$ -Schale als ganzzahliger Koordinatenschnitt der Hyperbel $ab=24$.

Ergebnisfenster. Theorie. Die Teiler von d^2-1 klassifizieren das vollständige Kartenfach und bestimmen seine eindeutige Balanceklasse. Praxis. Für jedes d lassen sich sämtliche Klassen ohne Suche nach Einzelfällen erzeugen. Deutung. Eine scheinbar offene Matrixlandschaft schrumpft auf

einen endlichen, lückenlosen Faktorkatalog. Grenze. Die Schalenklassen sind in der festgehaltenen Basis nur modulo Koordinatentausch definiert; die Permanente ist nicht basisinvariant.

Freiheitskonto. Für jedes gewählte d ist die Schale vollständig; d selbst bleibt frei.

KAPITEL 3

Die simultane Normalform des Zentralpaars

Singuläre Summe, Matrizenbüschel und intrinsische parabolische Weite

Jede der beiden Zentralmatrizen ist vollständig invertierbar. Dennoch verliert ihre gleichgewichtete Summe genau eine Dimension. Wie können zwei vollständige Formen gemeinsam unvollständig werden?

Die Antwort liegt nicht in einer weiteren Zahlenbeobachtung, sondern in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Ein einziger ganzzahliger Basiswechsel legt den Mechanismus offen und zeigt, dass Summe, Nullrichtung, Matrizenbüschel und Scherung dieselbe algebraische Quelle besitzen.

9 • Existenz und Eindeutigkeit

Für ungerades $d \geq 3$ liegen die beiden halben Nachbarn $(d-1)/2$ und $(d+1)/2$ als Teiler von $d^2 - 1$ in der Schale. Sie erzeugen die linke und die rechte Zentralmatrix

$$L_d = \begin{pmatrix} 2(d-1) & d \\ d & (d+1)/2 \end{pmatrix}, R_d = \begin{pmatrix} 2(d+1) & d \\ d & (d-1)/2 \end{pmatrix}.$$

Hauptsatz D • Zentraler Paarsatz. Für jedes ungerade $d \geq 3$ ist $\{L_d, R_d\}$ das einzige verschiedene Klassenpaar der orientierten Schale, dessen Summe singulär ist. Für gerades d existiert kein solches Paar.

Die bisherige Darstellung zeigt bereits

$$L_d + R_d = d \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(\lambda L_d + \mu R_d) = -(\lambda - \mu)^2.$$

Diese Aussagen lassen sich auf eine einzige ganzzahlige Normalform zurückführen.

10 • Ein Basiswechsel erklärt alles gleichzeitig

Setze

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \det B = 1.$$

Dann gilt durch direkte Multiplikation

$$B^T L_d B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & (d+1)/2 \end{pmatrix},$$

$$B^T R_d B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (d-1)/2 \end{pmatrix}.$$

Hauptsatz E · Simultane unimodulare Normalform. Der gleiche unimodulare Basiswechsel B bringt beide Zentralformen gleichzeitig in eine Form mit derselben isotropen ersten Achse und entgegengesetzten Kopplungen -1 und $+1$.

Daraus folgt sofort

$$B^T (L_d + R_d) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

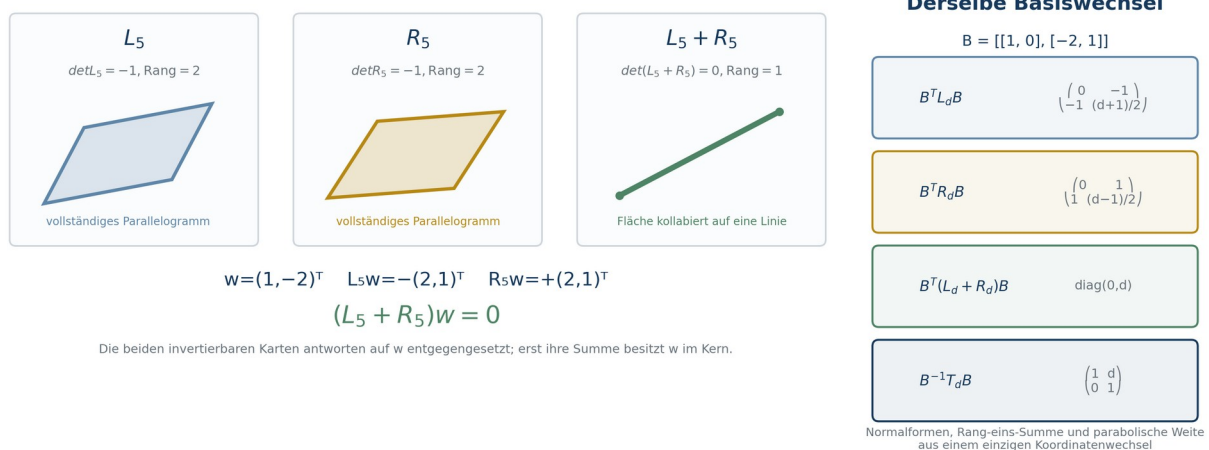
Die Summe verliert genau eine Dimension. Der Kern ist in dieser Basis die erste Koordinatenachse; in der ursprünglichen Basis entspricht sie dem primitiven Vektor

Geometrisches Bild. Eine invertierbare Matrix schickt ein Quadrat auf ein Parallelogramm mit Fläche. Die Zentralpaarsumme drückt dieses Bild auf eine Linie zusammen: Eine Richtung bleibt, die dazu unabhängige Richtung verschwindet. „Singulär“ bedeutet hier genau diesen Flächenverlust.

$$w = (1, -2)^T.$$

Zwei volle Karten - eine singuläre Summe

Schematische Rangdarstellung; die Formen sind nicht metrisch maßstäblich gezeichnet.



Algebraischer Kollaps einer Richtung - keine akustische Interferenz.

Abbildung 5 · Zwei invertierbare Karten, eine singuläre Summe. Die Richtung $w = (1, -2)$ erhält entgegengesetzte Antworten und fällt in $L_5 + R_5$ in den Kern; derselbe Basiswechsel zeigt Normalformen und parabolische Weite.

11 · Isotrope Linie und echter Kern

Die Einzelmatrizen besitzen Determinante -1 und sind daher invertierbar. Der Vektor w ist kein Matrixkern von L_d oder R_d . Er ist eine gemeinsame isotrope Richtung der zugehörigen quadratischen Formen. Mit $v = (2, 1)^T$ gilt

$$L_d w = -v, R_d w = v, (L_d + R_d) w = 0.$$

Die beiden Stimmen antworten auf derselben Richtung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Erst in der Gleichmischung löschen sich diese Antworten algebraisch aus.

Begriffsgrenze. Diese Gegenläufigkeit ist exakte lineare Algebra. Sie ist keine Behauptung über reale Schallinterferenz, Phasenlage oder akustische Auslöschung.

12 • Korollar aus Rang eins: universell 3:4:5

Für jede symmetrische singuläre Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

gilt $\alpha\gamma = \beta^2$ und damit

$$(\alpha - \gamma)^2 + (2\beta)^2 = (\alpha + \gamma)^2.$$

Auf die Zentralpaarsumme mit $(\alpha, \beta, \gamma) = (4d, 2d, d)$ angewandt entsteht

$$3d:4d:5d \rightarrow 3:4:5.$$

Das Verhältnis ist daher **universell für jedes ungerade d** . Es darf nicht als zusätzlicher Beweis für $d=5$ gezählt werden.

13 • Der relative Operator und die intrinsische Weite

Definiere den relativen Übergangsoperator

$$T_d = -L_d^{-1}R_d.$$

In der ursprünglichen Basis lautet

$$T_d = \begin{pmatrix} 2d+1 & d \\ -4d & 1-2d \end{pmatrix}, \det T_d = 1, \operatorname{tr} T_d = 2.$$

Der gleiche Basiswechsel liefert

$$B^{-1}T_dB = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Übergang eine ganzzahlige unipotente beziehungsweise parabolische Scherung. Noch wichtiger: Der Parameter d kann aus dem Operator rekonstruiert werden. Bezeichne mit $\operatorname{cont}(A)$ den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge einer Ganzzahlmatrix. Dann gilt

$$d = \operatorname{cont}(T_d - I).$$

Da die von den Einträgen erzeugte Idealstruktur unter unimodularer Links- und Rechtsmultiplikation erhalten bleibt, ist diese Zahl unter ganzzahliger Konjugation intrinsisch.

Korollar E.1 • Parabolische Weite. Die Kopplung d ist nicht nur ein gewählter Offdiagonaleintrag. Sie ist als ganzzahlige Weite des relativen Operators aus dem Zentralpaar selbst zurückgewinnbar.

Bild der Scherung. Wie bei einem Kartenstapel werden parallele Schichten gegeneinander verschoben, ohne ihre Höhe zu ändern. Die Zahl d misst die ganzzahlige Schrittweite dieser Verschiebung. Deshalb bleibt d als Fingerabdruck des Zentralpaars erhalten.

14 • Was die Normalform erklärt und was nicht

Der Ertrag dieses Teils liegt nicht in möglichst vielen Operationen auf dem Zentralpaar. Er liegt in der Kompression: Ein Basiswechsel erklärt die singuläre Summe, die gemeinsame isotrope Linie, das Matrizenbüschel und die Scherung zugleich. Koordinatenbezogene Zusatzkonstruktionen, die dieselbe Balanceklasse lediglich wiederfinden, tragen keinen zusätzlichen Satzstatus und werden im Hauptargument nicht mehr benötigt.

Die Wörter „Stimme“, „Gegenläufigkeit“ und „Auslöschung“ dürfen anschaulich verwendet werden, solange ihre mathematische Zuständigkeit sichtbar bleibt. Gemeint sind quadratische Formen und

lineare Operatoren. Eine reale akustische Phase, Energieübertragung oder Interferenz folgt daraus nicht.

Ergebnisfenster. Theorie. Singuläre Summe, isotrope Linie, Matrizenbüschel und parabolische Scherung sind eine einzige simultane Normalform. **Praxis.** Die Kopplung d ist aus dem relativen Operator rekonstruierbar und dient als intrinsischer ganzzahliger Fingerabdruck. **Deutung.** Die beiden Zentralformen bilden eine kontrollierte Gegenstimme: Sie widersprechen sich in genau einer Richtung und tragen gemeinsam die andere. **Grenze.** Aus dieser Algebra folgt keine reale Akustik, Energieübertragung oder historische Bedeutung.

Freiheitskonto. Ein Zentralpaar existiert genau für ungerades d . Innerhalb dieser ungeraden Teilfamilie ist d weiterhin frei.

Offene Frage vor Kapitel 4. Wie viele metallische Bedingungen braucht man, um d festzunageln? Muss man Gold und Silber gleichzeitig verlangen?

KAPITEL 4

Der Fünf-Äquivalenzsatz

Vierklassigkeit, eine metallische Stimme und genealogische Fixierung

Eine genügt. Und am Fixpunkt antwortet die zweite von selbst. Bis hierhin war d innerhalb der ungeraden Zentralfamilie frei; nun wird die Richtung der Frage umgekehrt: Nicht „Was lässt sich bei $d=5$ finden?“, sondern „Welche einzelne Eigenschaft lässt d gar keine andere Wahl, als fünf zu sein?“

Diese Umkehr ist der konzeptionelle Höhepunkt der Arbeit. Vierklassigkeit, Metallizität und eine bestimmte pythagoreische Kindadresse werden nicht addiert, sondern als äquivalente Beschreibungen desselben Fixpunkts bewiesen.

15 • Die eindeutige ungerade Vierklassenschale

Für ungerades d ist $d^2 - 1$ durch 8 teilbar. Besitzt die Schale vier Klassen, dann hat $d^2 - 1$ genau acht positive Teiler. Die mögliche Primfaktorstruktur ist so stark eingeschränkt, dass nur $d=5$ übrig bleibt.

Hauptsatz F • Vierklassen-Fixierung. Unter allen ungeraden $d \geq 3$ besitzt genau $d=5$ eine Schale mit vier Klassen.

Für $d=5$ gilt

$$d^2 - 1 = 24 = 24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4.$$

Die vier Klassen sind

$$E = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir benennen die vier Karten nach ihrer Rolle: $E=(24,1)$ ist die Extrem- oder Randklasse, $S=(12,2)$ die Silberklasse, $G=(8,3)$ die Goldklasse und $H=H_5=(6,4)$ die Balanceklasse. Die Buchstaben sind Merkhilfen, keine zusätzlichen Selektoren.

16 • Metallische Begleitmatrizen

Für $c \in \mathbb{N}$ sei

$$C_c = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Potenzen besitzen die Form

$$C_c^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & U_n \\ U_n & U_{n-1} \end{pmatrix}, U_{n+1} = c U_n + U_{n-1}.$$

Daraus folgt die notwendige Diagonalrelation

$$U_{n+1} - U_{n-1} = c U_n.$$

Für die beiden Zentralmatrizen wären die erforderlichen Metallkoeffizienten

$$c_L = \frac{3d-5}{2d}, c_R = \frac{3d+5}{2d}.$$

17 • Eine einzige Stimme genügt

Ist L_d eine Potenz irgendeiner ganzzahligen metallischen Begleitmatrix, dann muss c_L ganzzahlig sein. Aus

$$2c_L d = 3d - 5$$

folgt

$$d(3 - 2c_L) = 5.$$

Für ungerades $d \geq 3$ bleibt nur $d=5$. Für R_d gilt analog

$$d(2c_R - 3) = 5,$$

also ebenfalls $d=5$.

Hauptsatz G · Einzelstimmen-Metallsatz. Ist auch nur eine der Zentralmatrizen L_d oder R_d eine positive Potenz einer ganzzahligen metallischen Begleitmatrix C_c , dann gilt zwingend $d=5$. Am Lösungspunkt erscheint automatisch auch die zweite Stimme:

Mutige, aber exakte Lesart. Man muss Gold und Silber nicht als zwei Filter auf die Fünf setzen. Eine einzige metallische Stimme ruft den Fixpunkt auf; dort antwortet die zweite Stimme notwendig.

$$L_5 = C_1^5 = Q^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, R_5 = C_2^3 = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Namen Gold und Silber werden damit nicht vorab eingesetzt. Sie entstehen erst nach der Fixierung: C_1 besitzt den Goldenen Schnitt φ als dominanten Eigenwert, C_2 das Silberverhältnis $1 + \sqrt{2}$.

18 • Der Äquivalenzsatz

Für das pythagoreische Kindkriterium wird die Balanceklasse zunächst primitiv gelesen. Ihre Euklid-Adresse lautet

$$(m_0, n_0) = \left(\frac{d+1}{2}, \frac{d-1}{2} \right).$$

Das mittlere Barning-Kind besitzt die Adresse

$$B_d = \left(\frac{3d+1}{2}, \frac{d+1}{2} \right).$$

Die Diagonalen von L_d lauten

$$\left(2(d-1), \frac{d+1}{2} \right).$$

Beide Adressen stimmen genau dann überein, wenn

$$2(d-1) = \frac{3d+1}{2},$$

also genau bei $d=5$.

Hauptsatz H · Fünf-Äquivalenzsatz. Für ungerades $d \geq 3$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$d=5$;

$|S_d|=4$;

L_d ist eine positive Potenz eines C_c ;

R_d ist eine positive Potenz eines C_c ;

$L_d = Q^5$ und $R_d = C_2^3$;

die Euklid-Ausgabe von L_d ist das direkte Barning- B -Kind der Balanceausgabe.

Der Fünf-Äquivalenzsatz

Für ungerades $d \geq 3$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig

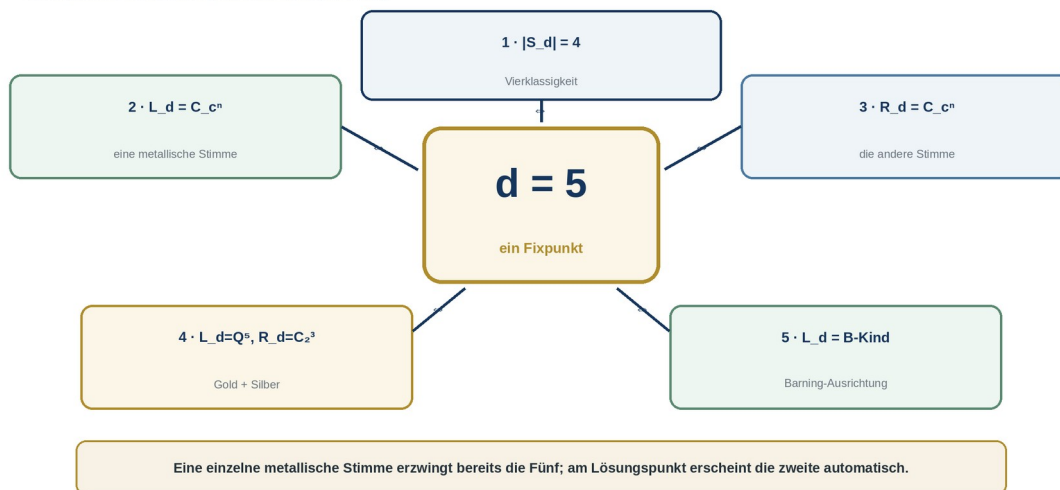


Abbildung 6 · Der Fünf-Äquivalenzsatz. Mehrere scheinbar verschiedene Eigenschaften sind Normalformen desselben Fixpunkts.

Evidenzregel. Äquivalente Aussagen sind keine sechs unabhängigen Beweise. Sie erhöhen die begriffliche Reichweite des Satzes, nicht die Zahl unabhängiger Zeugen.

19 · Die 49 als Pell-Korollar, nicht als Selektor

Die schalenweite Permanente ist genau dann ein Quadrat u^2 , wenn

$$u^2 - 2d^2 = -1.$$

Dies ist die klassische negative Pell-Gleichung [17]. Ihre positiven Lösungen beginnen mit

$$(d, u) = (1, 1), (5, 7), (29, 41), (169, 239), (985, 1393), \dots$$

Nach Ausschluss des trivialen $d=1$ ist $d=5$ der erste, aber nicht der einzige Quadratpermanenzfall.

Die zugehörigen u -Werte 1, 7, 41, 239, 1393, ... sind als NSW-Folge OEIS A002315 geführt. Die d -Werte 1, 5, 29, 169, 985, ... besitzen den präziseren Eintrag A001653 und bilden die ungerad indizierte Teilfolge der Pell-Zahlen A000129 [25–27].

Die 49 ist daher eine exakte Prüfsumme der $d=5$ -Schale, aber kein Alleinselektor.

Praktische Lesart. Quadratische Permanente ist leicht algorithmisch testbar, markiert aber eine ganze Pell-Folge. Die Fünf wird erst durch die übrigen äquivalenten Bedingungen eindeutig.

Theorie: $d=5$ ist äquivalent zu Vierklassigkeit, jeder einzelnen metallischen Zentralstimme und der ausgezeichneten Kindrelation.

Praxis: Schon ein Metalltreffer auf einer Zentralstimme identifiziert die gesamte Schale.

Deutung: Die Fünf erscheint als Übersetzungsfixpunkt, an dem Teiler-, Matrix-, Rekurrenz- und Baumadressierung zusammenfallen.

Grenze: Äquivalente Beschreibungen sind keine unabhängigen Beweise; die 49 ist eine Pell-Prüfsumme, kein Alleinselektor.

KAPITEL 5

Der Topograph der Schale

Vier lokale Kantenkonfigurationen, zwei topographische Träger und zwei ganzzahlige Gittertypen

Die Fünf-Schale zeigt vier sichtbare Karten. Die klassische Theorie besitzt dafür bereits eine Landkarte: den Conway-Topographen binärer quadratischer Formen. Er macht sichtbar, wo die Schale im bekannten Diskriminante-4-Gelände liegt, bevor die eigene Grammatik mit Zentralpaar, Metallizität und Genealogie fortsetzt.

Dieses Kapitel trennt drei Ebenen: die lokale Schalenkarte, ihren klassischen topographischen Träger und den intrinsischen Gittertyp unter $GL_2(\mathbb{Z})$ -Kongruenz. Die Einordnung verkleinert den Neuheitsanspruch, stärkt aber die mathematische Anschlussfähigkeit.

20 • Zwei verschiedene Äquivalenzbegriffe

Die Schale identifiziert nur den Tausch der beiden Koordinaten. Die klassische Theorie ganzzahliger bilinearer Formen betrachtet dagegen Kongruenz

$$M \sim_{GL_2(\mathbb{Z})} U^T M U, \quad U \in GL_2(\mathbb{Z})$$

Unter diesem stärkeren Begriff können mehrere Schalenkarten denselben intrinsischen Gittertyp darstellen. Für indefinite unimodulare Formen der Signatur $(1, 1)$ unterscheidet die Parität zwei Typen [16,18]:

$$I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für ungerade Formen und

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für gerade Formen.

20.1 • Die klassische topographische Übersetzung

Zu jeder Schalenmatrix gehört die binäre quadratische Form

$$M = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} \quad Q_M(x, y) = ax^2 + 2dxy + by^2.$$

Im Conway-Hatcher-Topographen wird eine gewählte Basis durch eine Kante dargestellt: Die angrenzenden Regionen tragen die Werte a und b , die Kante selbst die Markierung $h=2d$. Für jede solche Kante gilt $\Delta=h^2-4ab$ [22–24].

Die Schalenbedingung $ab-d^2=-1$ ist daher exakt äquivalent zu $\Delta=(2d)^2-4ab=4$. Umgekehrt liefert jede positive lokale Kantenkonfiguration mit $|h|=2d$ und $\Delta=4$ ein Faktorenpaar von d^2-1 . Die d -Schale ist somit ein positiver Festlabel-Querschnitt durch die Topographen der Diskriminante 4.

Anschauliches Bild • Eine Landkarte aus Zahlen. Stellen Sie sich den Topographen wie eine Landkarte vor. Jede Region trägt eine ganze Zahl, und zwei benachbarte Regionen werden durch eine Kante mit eigener Markierung getrennt. Bei unseren Karten stehen auf den beiden Regionen die Diagonalwerte a und b ; die Kante dazwischen trägt $2d$, bei der Fünf also 10. Ein Conway-Fluss trennt gewöhnlich positives von negativem Zahlengelände. Unsere vier Kanten liegen jedoch vollständig im positiven Binnenland, weil auf beiden Seiten

positive Werte stehen; deshalb sind sie keine Flusskanten. „Träger“ heißt hier nur: Auf welcher der beiden klassischen Zahlenlandkarten liegt die Kante? Der Topograph erklärt, wo die Karten wohnen. Zentralpaar, Gold, Silber und Stammbaum entstehen erst in der anschließenden Grammatik.

Da 4 ein Quadrat ist, repräsentieren diese Formen null; Hatcher bezeichnet die entsprechende Geometrie als 0-hyperbolisch. Die Nullrepräsentation ist eine globale Eigenschaft des Topographen und von der positiven lokalen Kantenkonfiguration zu unterscheiden.

Bei $d=5$ ist $|h|=10$. E und G haben Koeffizienteninhalte $\text{ggT}(a,10,b)=1$ und liegen auf dem primitiven ungeraden Träger x^2-y^2 . S und H besitzen Inhalt 2 und liegen auf dem imprimitiven geraden Träger $2xy$. O’Sullivans Abbildung 4.2 zeigt den einzigen primitiven Topographen der Diskriminante 4 [24].

Der gerade Typ $U \cong 2xy$ erscheint in der vorliegenden Arbeit dagegen im imprimitiven Inhalt-2-Sektor und kann als Verdopplung der Diskriminante-1-Form xy gelesen werden. So erhält die Formel „vier Gesichter, zwei Skelette“ eine klassische topographische Adresse.

Die Fünf-Schale als Festlabel-Querschnitt der Diskriminante 4

$$Q_M(x, y) = ax^2 + 10xy + by^2 \quad \text{und} \quad \Delta = 10^2 - 4ab = 4$$

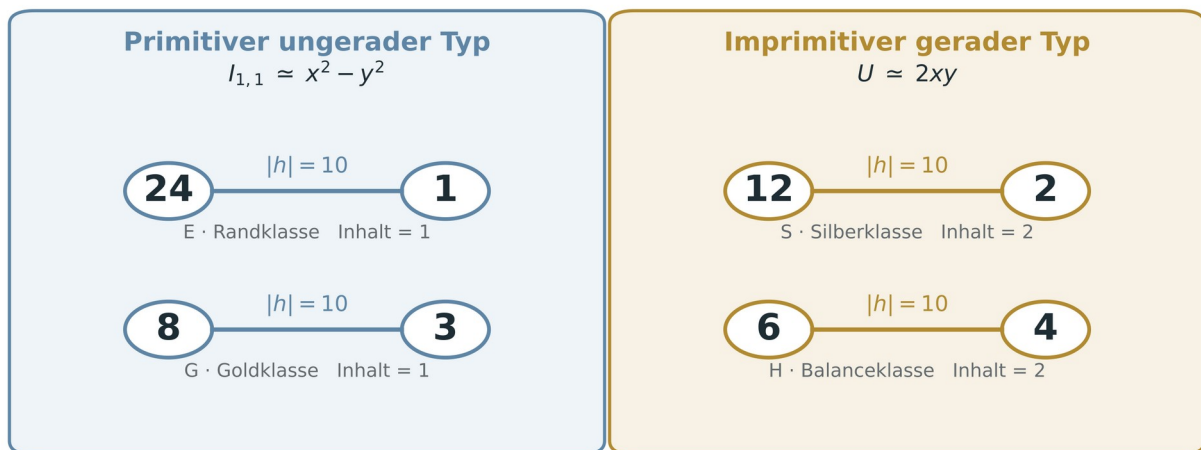


Abbildung 7a · Die Fünf-Schale als Festlabel-Querschnitt der Diskriminante 4: vier positive Kantenkonfigurationen auf zwei topographischen Trägern.

21 · Was unter Basiswechseln erhalten bleibt

Für ungerades d ist eine Schalenform genau dann gerade, wenn beide Diagonaleinträge gerade sind. Die genaue Zahl solcher Klassen ist $\tau((d^2-1)/4)/2$; der Beweis steht in Anhang A.8. Topographisch trennt dies den primitiven ungeraden vom imprimitiven geraden Träger. Gittertheoretisch bleiben die beiden Kongruenztypen $I_{1,1}$ und U .

Anschauliches Bild: Die Schale zeigt vier Gesichter. Ein ganzzahliger Basiswechsel legt darunter nur zwei Skelette frei: den ungeraden Typ $I_{1,1}$ und die gerade hyperbolische Ebene U .

22 · Der Spezialfall $d=5$

Bei $d=5$ sind E und G ungerade, S und H gerade. Explizite unimodulare Transformationen zeigen

$$E \sim G \sim I_{1,1}, S \sim H \sim U.$$

Zum Beispiel gelten

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^T E \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = I_{1,1}$$

und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T S \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = U.$$

Die Transformationen für G und H stehen im Rechenaudit und in Anhang A.

Vier Koordinatenklassen – zwei intrinsische Gittertypen

Koordinatentausch ist feiner als volle $GL_2(\mathbb{Z})$ -Kongruenz

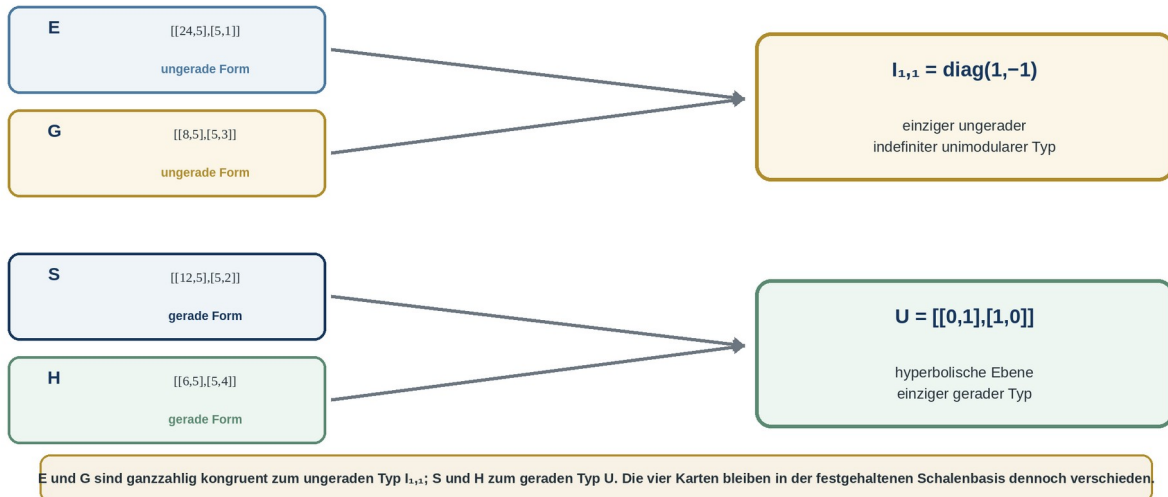


Abbildung 7b · Vier koordinatenbezogene Schalenkarten kollabieren unter voller ganzzahliger Kongruenz in zwei Paritätstypen.

Interpretation. Die vier Klassen sind für den festgehaltenen Offdiagonaleintrag und den Euklid-Decoder real verschieden. Intrinsisch als unimodulare Gitter existieren jedoch nur zwei Typen. Diese Unterscheidung macht die Arbeit präziser, nicht schwächer.

KAPITEL 6

Der schalenweite Rohbein-Decoder

Euklid-Ausgaben, Reduktionsfaktor und primitive Form

Bis hierhin sind die Objekte Matrizen. Nun wechselt die Sprache. Die beiden Diagonaleinträge werden als Euklid-Eltern gelesen, und aus jeder Zahlenkarte entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten.

Die Matrix enthält das Dreieck nicht als Bild, sondern als Rezept. Der Unterschied zwischen Rohtripel und primitiver Ausgabe ist dabei entscheidend: Erst der Reduktionssatz zeigt, welche gemeinsamen Faktoren aus der Elternstruktur stammen und welche Form danach übrig bleibt.

23 • Diagonalen als Euklid-Eltern

Für positive ganze $m > n$ liefert Euklids Identität

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Setzen wir die Diagonalen einer Schalenmatrix als $m = a$ und $n = b$ ein, dann ist $ab = d^2 - 1$ schalenweit fest. Daher entsteht

$$2ab = 2(d^2 - 1)$$

als gemeinsames erstes Rohbein.

Hauptsatz J · Schalenweiter Rohbein-Decoder. Jede Klasse $M = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}$ der d -Schale erzeugt das Rohtripel

Praktischer Algorithmus. Faktorpaare von $d^2 - 1$ erzeugen die Eltern. Euklids Formel erzeugt das Rohtripel. Der ggT- und Paritätssatz reduziert es. Damit lässt sich jede Schale ohne Fallraten vollständig in eine Tripelliste übersetzen.

$$2(d^2 - 1) : (a^2 - b^2) : a^2 + b^2.$$

Alle Rohtripel derselben Schale besitzen dasselbe erste Bein $2(d^2 - 1)$.

Die präzise Bezeichnung lautet „Rohbein-Decoder“: Fest ist das Rohbein. Nach primitiver Reduktion kann sich seine Länge ändern.

24 • Der allgemeine Reduktionssatz

Sei

$$g = \gcd(a, b), a = gA, b = gB, \gcd(A, B) = 1.$$

Dann besitzt das Rohtripel zunächst den gemeinsamen Faktor g^2 . Sind A und B beide ungerade, tritt zusätzlich der klassische Paritätsfaktor 2 auf. Damit gilt:

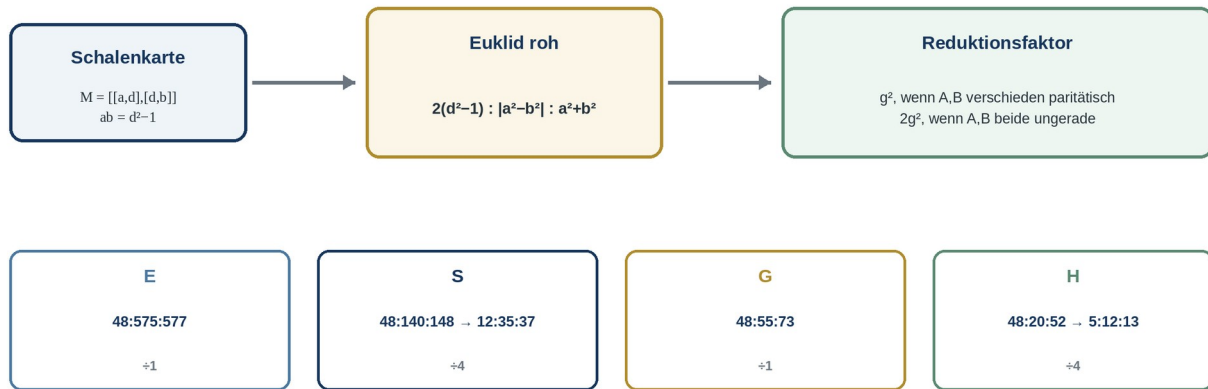
Hauptsatz K · Primitivitäts- und Reduktionssatz. Für das Euklid-Rohtripel aus (a, b) ist

$$\gcd(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2) = \begin{cases} g^2, & A, B \text{ verschiedener Parität,} \\ 2g^2, & A, B \text{ beide ungerade.} \end{cases}$$

Nach Division durch diesen Faktor ist das Tripel primitiv.

Schalenweiter Rohbein-Decoder

Was fest bleibt – und wodurch primitive Tripel entstehen



Bei $d=5$ ist 48 die gemeinsame Rohkathete. Erst der Reduktionssatz erklärt, warum die primitiven Ausgaben unterschiedliche erste Beine besitzen.

Abbildung 8 · Der Decoder trennt schalenweite Rohstruktur und klassenabhängige primitive Reduktion.

25 · Die vier Ausgaben der $d=5$ -Schale

Klasse	Eltern (a, b)	Rohtripel	Reduktionsfaktor	primitive Ausgabe
<i>E</i>	$(24, 1)$	48:575:577	1	48:575:577
<i>S</i>	$(12, 2)$	48:140:148	4	12:35:37
<i>G</i>	$(8, 3)$	48:55:73	1	48:55:73
<i>H</i>	$(6, 4)$	48:20:52	4	5:12:13

Die Tabelle erklärt vollständig, warum die vier primitiven Ausgaben nicht alle mit 48 beginnen, obwohl das Rohbein schalenweit fest ist.

26 · Das Tripel der ganzen Schale

Ist die Permanente $2d^2 - 1 = u^2$ ein Quadrat, dann gilt

$$u^2 + (d^2 - 1)^2 = d^4.$$

Damit besitzt die ganze Schale das Invariantentripel

$$u : (d^2 - 1) : d^2.$$

Seine Euklid-Eltern sind

$$\left(\frac{u+1}{2}, \frac{u-1}{2} \right).$$

Für $d=5$ ergibt dies $(4, 3)$ und damit 7:24:25.

Ergebnisfenster. Theorie. Jede Klasse erzeugt ein Rohtripel mit schalenweit festem Bein; der Reduktionssatz klassifiziert die primitive Ausgabe. **Praxis.** Die Schale wird zu einem deterministischen Generator rechtwinkliger Ganzzahldreiecke. **Deutung.** Die Matrix enthält nicht das fertige Dreieck, sondern dessen Eltern und damit seine Entstehungsregel. **Grenze.** Fest ist das Rohbein, nicht notwendig das Bein nach primitiver Kürzung.

KAPITEL 7

Pythagoreische Vererbung

Allgemeine Kindadressen und doppelte Fixierung bei $d=5$

Eine Liste von Dreiecken ist noch keine Familie. Eine Familie beginnt dort, wo jedes Mitglied Eltern, Kinder, Geschwister und eine eindeutige Adresse besitzt.

Der Barning-Hall-Baum liefert dieses genealogische Koordinatensystem. Er macht aus bloßer Zahlennähe eine Vererbungsrelation und erzwingt zugleich Kontrollgeschwister, die nicht entfernt werden dürfen, nur weil sie weniger gut zur Geschichte passen.

27 • Die Balanceausgabe als Elternknoten

Für ungerades d besitzt die primitive Balanceadresse

$$(m, n) = \left(\frac{d+1}{2}, \frac{d-1}{2} \right)$$

das Tripel

$$d : \frac{d^2-1}{2} : \frac{d^2+1}{2}.$$

Die klassischen Transformationen auf Euklid-Paaren $[14, 15, 19, 20]$ erzeugen drei Kinder:

$$A : (m, n) \mapsto (2m - n, m),$$

$$B : (m, n) \mapsto (2m + n, m),$$

$$C : (m, n) \mapsto (m + 2n, n).$$

Einsetzen der Balanceadresse liefert die geschlossenen Kindadressen

$$A_d = \left(\frac{d+3}{2}, \frac{d+1}{2} \right),$$

$$B_d = \left(\frac{3d+1}{2}, \frac{d+1}{2} \right),$$

$$C_d = \left(\frac{3d-1}{2}, \frac{d-1}{2} \right).$$

Warum der Baum mehr ist als eine Liste. Ein Treffer im Baum besitzt eine vorab definierte Adresse. Das dritte Geschwister bleibt sichtbar, auch wenn es keine Gold- oder Pell-Rolle trägt. Genau diese erzwungene Kontrolle schützt vor nachträglicher Auswahl.

28 • Die linke Zentralstimme trifft das B-Kind

Die Euklid-Adresse von L_d ist

$$\left(2(d-1), \frac{d+1}{2} \right).$$

Sie stimmt mit B_d genau bei $d=5$ überein. Damit ist die Goldausgabe 48:55:73 nicht nur irgendein Kind unter 5:12:13, sondern die eindeutige Zentralstimme, die im ungeraden Schalenraum direkt auf die mittlere Kindadresse fällt.

Hauptsatz L · Gold-Kindsatz. Unter allen ungeraden $d \geq 3$ erzeugt L_d genau dann das direkte Barning- B -Kind der Balanceausgabe, wenn $d = 5$.

29 • Das Schaleninvariant trifft das A-Kind

Für eine Quadratpermanenzschale besitzt das Invariantentripel die Eltern

$$\left(\frac{u+1}{2}, \frac{u-1}{2}\right), u^2 - 2d^2 = -1.$$

Diese Adresse stimmt mit A_d genau dann überein, wenn $u = d + 2$. Zusammen mit der Pell-Gleichung folgt

$$(d+2)^2 - 2d^2 = -1 \Rightarrow (d-5)(d+1) = 0.$$

Für positive $d \geq 2$ bleibt wiederum $d = 5$.

Hauptsatz M · Pell-Kindsatz. Unter den nichttrivialen Quadratpermanenzschalen ist $d = 5$ genau der Fall, in dem das Schaleninvariant das direkte Barning- A -Kind der Balanceausgabe bildet.

Doppelte genealogische Fixierung

Die Balanceadresse besitzt drei klassische Kinder; zwei Ausrichtungen treffen nur bei $d=5$

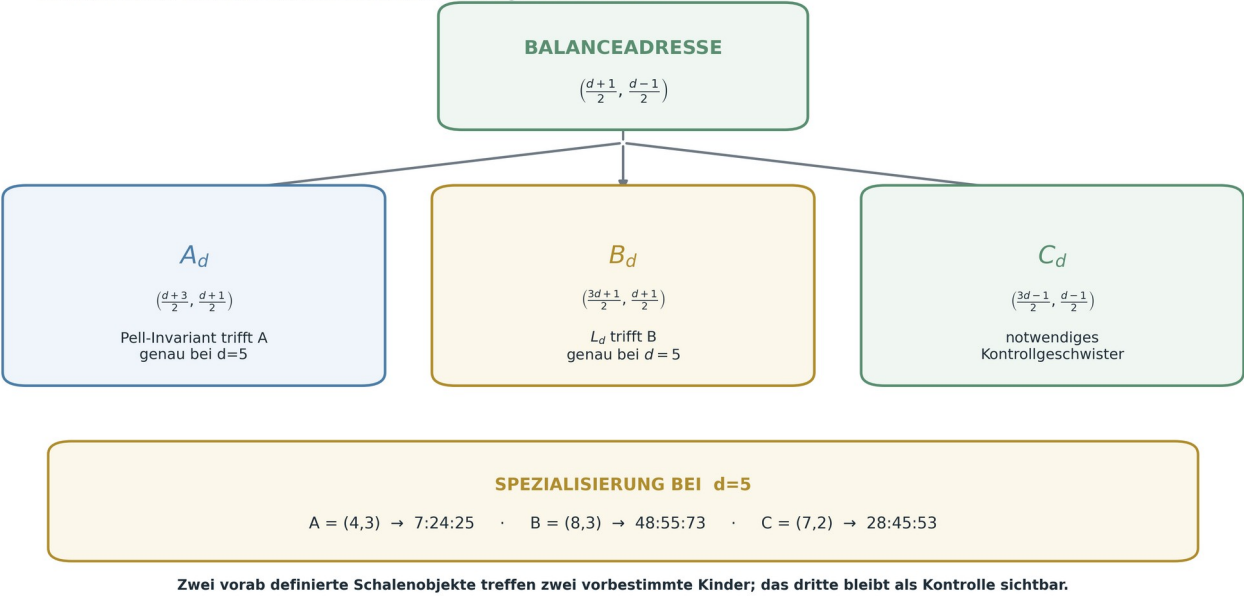


Abbildung 9 · Doppelte genealogische Fixierung: Schaleninvariant auf Ast A , linke Zentralstimme auf Ast B , Kontrollgeschwister auf Ast C .

30 • Der lokale Dreierast bei $d = 5$

Für $d = 5$ ist die Balanceausgabe 5 : 12 : 13 mit Eltern $(3, 2)$. Ihre drei Kinder sind

Ast	Eltern	Tripel	Herkunft in dieser Arbeit
A	(4, 3)	7 : 24 : 25	Schaleninvariant
B	(8, 3)	48 : 55 : 73	linke Zentralmatrix, später Gold
C	(7, 2)	28 : 45 : 53	notwendige genealogische Kontrolle

Der Kontrollknoten ist kein fünftes Mitglied der 49-Schale. Er entsteht aus dem Baumoperator, nicht aus einem Faktorpaar von 24. Gerade diese Trennung verhindert, dass der Stammbaum nachträglich als beliebige Zahlensammlung gelesen wird.

Ergebnisfenster. Theorie. Die Balanceausgabe besitzt allgemeine Kindadressen; bei $d=5$ treffen Gold und Pell-Invariant zwei vorbestimmte Äste. **Praxis.** Baumadressen und Kontrollgeschwister erlauben eine strenge, reproduzierbare Genealogieprüfung. **Deutung.** Aus Zahlennähe wird Vererbung: Die Objekte sitzen nicht nur nahe beieinander, sondern an festgelegten Familienplätzen. **Grenze.** Diese Genealogie ist mathematisch. Sie beweist weder architektonische Abstammung noch historische Kenntnis des Baumverfahrens.

KAPITEL 8

Prior Art, Selektivität und Grenzen

Was klassisch ist, was diese Arbeit komponiert und wie weit der Claim reichen darf

Eine Struktur kann mathematisch richtig und trotzdem seit Langem bekannt sein. Sie kann aus klassischen Bausteinen bestehen und dennoch neu komponiert sein. Und sie kann elegant sein, ohne die natürlichste aller denkbaren Modellsprachen zu bilden.

Dieses Kapitel trennt deshalb drei Fragen: Ist der Satz korrekt? Ist die konkrete Komposition bereits publiziert? Ist die gewählte Grammatik gegenüber nahen Alternativen sparsam? Nur die erste Frage beantwortet ein Beweis allein.

31 • Bekannte Bausteine und warum das kein Einwand ist

Die Grundwerkzeuge dieser Arbeit sind klassisch. Determinanten und binäre quadratische Formen gehören zur linearen Algebra und Zahlentheorie [16,18]. Conway und Hatcher geben mit dem Topographen eine etablierte Landkarte für Formwerte und Kantenmarkierungen; O'Sullivan behandelt diese Theorie auch für positive Quadratdiskriminanten [22–24]. Fibonacci- und Pell-Matrizen sind etablierte Rekurrenzmaschinen [9–13]. Euklids Formel erzeugt rechtwinklige Ganzzahldreiecke [8], und Barning, Hall sowie spätere Darstellungen ordnen die primitiven Tripel in eine vollständige Genealogie [14,15,19,20].

Die topographische Übersetzung nimmt die Schalen- und Gitterebene wesentlich klassisch vorweg. Der mögliche eigene Beitrag kann deshalb nicht in der bloßen Gleichung $\Delta=4$, im Festlabel-Querschnitt oder in den zwei Gittertypen liegen. Er beginnt erst bei der gerichteten Auswahl von Zentralpaar, gemeinsamer Normalform, metallischem Selektor und pythagoreischer Vererbung.

Das ist keine Schwäche, sondern eine Voraussetzung für Prüfbarkeit. Ein neues Ergebnis muss nicht jedes verwendete Werkzeug neu erfinden. Auch ein Architekt erfindet weder den Stein noch den rechten Winkel; zur Prüfung steht, welche Konstruktion aus den bekannten Bauteilen entsteht.

Der mögliche Eigenbeitrag dieser Arbeit kann deshalb nicht lauten: Fibonacci, Pell, Pythagoras oder unimodulare Matrizen seien hier entdeckt worden. Er kann nur in der genauen Verbindung liegen – in der Reihenfolge der Übergänge, in der gemeinsamen Normalform und in den Äquivalenzen, die mehrere Sprachen auf denselben Fixpunkt zurückführen.

32 • Was an dieser Arbeit neu sein könnte

Neuheit kann auf verschiedene Weise entstehen. Ein Alphabet ist bekannt, während ein bestimmter Satz neu sein kann. Einzelne Töne sind bekannt, während eine bestimmte Partitur neu sein kann. Zutaten können vertraut sein, während ihre genaue Verbindung ein neues Rezept ergibt.

Die Neuheitsfrage dieser Arbeit lautet daher nicht: Hat sie Fibonacci, Pell, Pythagoras oder unimodulare Matrizen entdeckt? Sie lautet: Wurde diese konkrete Kette bereits als ein einziges mathematisches System formuliert?

Die vorgeschlagene Kette beginnt beim kleinsten negativen ganzzahligen Splitfall $\det M=-1$. In klassischer Sprache entsteht daraus ein Festlabel-Querschnitt der Diskriminante-4-Topographen und darin die vollständige endliche Schale. In jeder ungeraden Schale erscheint ein eindeutig bestimmtes

Zentralpaar. Ein einziger ganzzahliger Basiswechsel bringt beide Zentralmatrizen gleichzeitig in eine gemeinsame Normalform; singuläre Summe, Matrizenbüschel und parabolische Weite werden gemeinsam sichtbar.

Danach folgt der entscheidende Fixierungsschritt: Ist auch nur eine der beiden Zentralmatrizen eine Potenz einer ganzzahligen metallischen Begleitmatrix, muss $d=5$ gelten. Am selben Punkt erscheint automatisch auch die zweite Stimme. Fibonacci und Pell – Gold und Silber – sind damit nicht zwei zusätzliche Suchtreffer, sondern die notwendige Doppelantwort desselben Fixpunkts.

Schließlich werden die Diagonalen als Euklid-Eltern gelesen. Jede Schalenkarte erzeugt ein Rohtripel, der Reduktionssatz liefert seine primitive Form, und der Barning-Hall-Baum weist feste Familienadressen zu. Bei $d=5$ treffen das Schaleninvariant und die linke Zentralmatrix zwei vorbestimmte Kinder derselben Balanceausgabe.

Warum ist dies mehr als eine Collage bekannter Themen? Weil jeder Pfeil durch eine definierte Operation oder einen Satz getragen wird. Die Ausgabe eines Schrittes wird zur Eingabe des nächsten. Es wird nicht an jeder Station eine neue passende Zahl gewählt. Im Gegenteil: Die Zahl der freien Entscheidungen nimmt von Schritt zu Schritt ab.

Bekannter Sockel - mögliche neue Partitur



Die Töne sind bekannt. Zur Prüfung steht, ob diese genaue Partitur bereits geschrieben wurde.

Orientierungsbild · Minimalfall, Topograph und Schale bilden den klassischen Sockel. Zur Prüfung steht die gerichtete Fortsetzung zu Zentralpaar, Normalform, Metallizität und Tripelbaum.

$-1 \rightarrow \Delta=4\text{-Topograph} \rightarrow \text{Schale} \rightarrow \text{Zentralpaar} \rightarrow \text{Normalform} \rightarrow d=5 \rightarrow \text{Gold/Silber} \rightarrow \text{Tripelbaum}$

Die erweiterte dokumentierte Suche vom 14. Juli 2026 fand die klassischen Einzelbestandteile umfassend belegt und ordnete die Schale zusätzlich in die Conway-Hatcher-Topographen der Diskriminante 4 ein. Im gesichteten Material wurde jedoch keine Quelle identifiziert, die von diesem Festlabel-Querschnitt weiter zu Zentralpaar, simultaner Normalform, Fixierung durch bereits eine metallische Stimme, Rohbein-Decoder und doppelter genealogischer Ausrichtung als einer gemeinsamen Satzketten führt.

Belastbare Neuheitssprache. Die Schalen- und Gitterebene besitzt eine klassische topographische Übersetzung. Nach dem dokumentierten Suchstand wurde jedoch keine frühere Veröffentlichung identifiziert, die aus diesem Festlabel-Querschnitt dieselbe gerichtete Fortsetzung zu singulärem Zentralpaar, simultaner Normalform, Einzelstimmen-Metallsatz und pythagoreischer Genealogie entwickelt. Der mögliche eigene Beitrag beginnt daher nach dem klassischen Sockel.

Was würde den Neuheitsanspruch widerlegen? Vorwegnahmetest. Eine topographische Teilvorwegnahme liegt bereits dort vor, wo positive Festlabel-Konfigurationen der Diskriminante 4 und ihre primitiven beziehungsweise imprimitiven Träger klassifiziert werden [22–24]. Den zentralen Neuheitsanspruch würde eine Quelle wesentlich treffen, wenn sie – auch in anderer Notation – innerhalb dieses Querschnitts zusätzlich das ausgezeichnete singuläre Paar, eine äquivalente gemeinsame ganzzahlige Normalform oder denselben parabolischen Relativoperator und einen Einzelstimmen-Selektor für $d=5$ herleitet. Eine Verknüpfung mit Rohbein-Decoder und Barning-Hall-Fixierung wäre eine vollständige Vorwegnahme. „Nicht gefunden“ bedeutet weiterhin nicht „weltweit ausgeschlossen“.

33 · Selektivitäts- und Reproduzierbarkeitsaudit

Der Autorenaudit prüft die Arbeit auf drei Ebenen: symbolisch, durch eine separat implementierte vollständige Konstruktion kleiner Schalen und durch einen großen Selektivitätsscan. Ein zweiter projektinterner Codepfad verwendet eine eigene Faktorisierungs- und Matrixpotenzlogik.

Die Publikationsfassung archiviert zusätzlich den projektbegleitenden KI-Spotcheck R1 von Claude (Anthropic) als dritten, separat implementierten Codepfad.

Vier Zahlen zum Prüfstand. 23 symbolische Kernchecks; 2.999 vollständig aufgebaute Schalen bis $d=3000$; ein Scan aller d von 2 bis 100.000; im geprüften Fenster nur $d=5$ zugleich ungerade und vierklassig. Die einzigen metallischen Zentralstimmen sind Q^5 und C_2^3 .

Drei Codepfade – klare Unabhängigkeitsgrenze. Der projektinterne Gegencheck prüft ungerade Vierklassenschalen bis $d=2.000.000$ und metallische Zentralpotenzen bis $d=5000$ mit eigener Implementierung. Der KI-Spotcheck R1 von Claude (Anthropic) verwendet weder Autorenaudit noch Gegencheck, bestätigt dieselben erweiterten Fenster und zusätzlich Normalform, Matrizenbüschel, parabolischen Operator sowie vier Gittertransformationen. Sein Originalcode, Bericht, Umgebung und Hash sind archiviert. Der Codepfad ist implementatorisch getrennt, aber nicht organisatorisch unabhängig vom Projekt; eine Reproduktion durch unbeteiligte Dritte bleibt offen.

Selektivitäts- und Reproduzierbarkeitsaudit

Großes Fenster plus separat implementierte Kleinfenster-Konstruktion

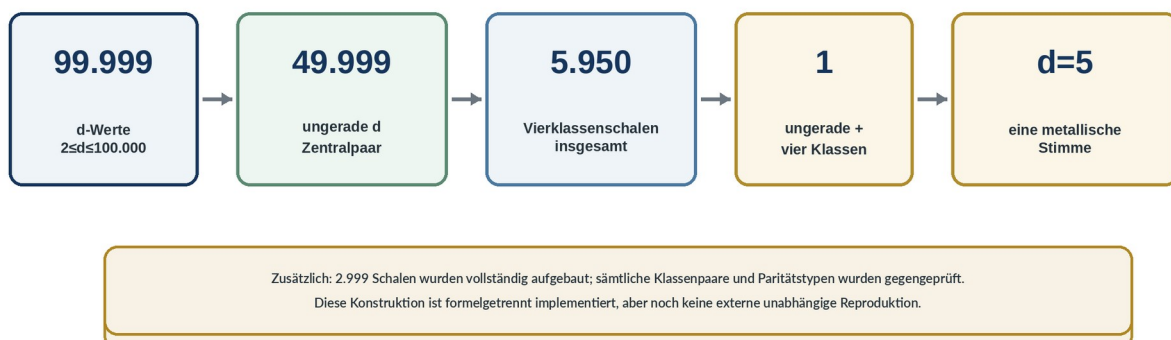


Abbildung 10 · Selektivitätsaudit. Die große Enumeration wird durch eine vollständige Konstruktion kleinerer Schalen ergänzt.

34 · Was diese Arbeit theoretisch und praktisch leistet

Theoretisch liefert die Arbeit eine vollständige Teilerklassifikation, ihre exakte topographische Einordnung, eine simultane ganzzahlige Normalform und einen Äquivalenzsatz, der mehrere klassische Sprachen auf einen Fixpunkt zurückführt. Der mögliche eigene Beitrag beginnt nicht beim Diskriminante-4-Topographen, sondern bei der gerichteten Fortsetzung zu Zentralpaar, Metallizität und Genealogie.

Praktisch entsteht ein endliches Rechenverfahren. Für ein gegebenes d lassen sich alle Klassen erzeugen, Balance und Zentralpaar bestimmen, die intrinsische Weite rekonstruieren, metallische Stimmen testen, Euklid-Tripel reduzieren und Baumadressen kontrollieren. Der Audit macht diese Kette maschinenlesbar und reproduzierbar.

Methodisch ist die Arbeit ein Beispiel dafür, wie aus auffälligen Zahlenkontakten eine prüfbare Grammatik werden kann: Suchraum offenlegen, Setzungen zählen, abhängige Korollare nicht mehrfach werten, Kontrollfälle zeigen und jede Anwendung an ihrer eigenen Evidenzgrenze stoppen.

35 · Fünf harte Grenzen

Modellwahl. Die Grammatik ist innerhalb der κ -Familie und der festgelegten Schalenbasis motiviert. Eine noch kürzere Konkurrenzgrammatik könnte ihre Natürlichkeitsbehauptung schwächen.

Äquivalenzen. Vierklassigkeit, Metallizität und genealogische Fixierung beschreiben denselben Punkt. Sie dürfen nicht als mehrere unabhängige Beweise gezählt werden.

Koordinaten. Vier Schalenkarten sind nicht dasselbe wie vier intrinsische Gittertypen. Basisabhängige und basisinvariante Aussagen bleiben getrennt.

Anwendung. Gizeh, Raum und Klang können die Algebra veranschaulichen, aber keinen Satz über Matrizen rückwärts beweisen.

Neuheit. Ein negativer Suchbefund ist ein Indiz, keine Garantie. Priorität verlangt professionelle Datenbankprüfung und externe Fachbegutachtung.

36 · Woran die Arbeit scheitern darf

Ein Fehler in einem der Sätze A–M widerlegt den mathematischen Kern.

Eine frühere Publikation schwächt oder widerlegt den Neuheitsanspruch, wenn sie – auch in topographischer, formtheoretischer oder anderer Notation – eine mathematisch äquivalente Verbindung aus Festlabel-Querschnitt, Zentralpaar-Normalform, $d=5$ -Selektor und genealogischer Ausgabe in einem zusammenhängenden Argument enthält.

Eine gleich kurze oder kürzere Grammatik, die dieselben Strukturen mit weniger Setzungen erzeugt, schwächt die Natürlichkeitsbehauptung.

Eine organisatorisch unabhängige Reproduktion durch unbeteiligte Dritte, die die angegebenen Enumerationen nicht bestätigt, würde die Reproduzierbarkeit schwächen. Autorenaudit, projektinterner Gegencheck und KI-Spotcheck R1 sind dafür ein Prüfangebot, nicht der Ersatz.

Reale Raum- oder Klangdeutungen fallen, wenn vorregistrierte Messungen keine stabilen Fingerabdrücke zeigen. Die reinen Sätze bleiben davon unberührt.

Ergebnisfenster. Theorie. Der mögliche Eigenbeitrag liegt in Normalform, Äquivalenzbündel und gerichteter Satzkomposition. **Praxis.** Audit, Suchprotokoll und Scheiterkriterien machen die Arbeit prüf- und versionierbar. **Deutung.** Der Fortschritt besteht in sinkender Freiheit: Jede spätere Zahl muss eine Herkunftsadresse besitzen. **Grenze.** Neuheit, globale Natürlichkeit, historische Absicht und physikalische Realität verlangen jeweils eigene externe Prüfungen.

Schlussfolgerung

Diese Arbeit begann mit einer kleinen Zahlenkarte. In ihrer Mitte stand zweimal dieselbe Zahl d , und über Kreuz sollte die Minusprobe -1 ergeben. Am Anfang war nicht abzusehen, dass daraus eine vollständige Grammatik entstehen würde.

Der erste entscheidende Schritt bestand darin, die Determinante -1 nicht nur als nützliche Setzung zu behandeln. Der Minimalfall ist dreifach charakterisiert: Negative Unimodularität, die kleinste positive Quadratdiskriminante innerhalb der rational gespaltenen Familie und unmittelbare Nachbarstimmen führen jeweils auf $\kappa=1$. Rationale Spaltbarkeit allein wäre schwächer; sie ließe jedes Quadrat $\kappa=s^2$ zu. Der Titel „zwischen Vier und Sechs“ ist bei $d=5$ deshalb die wörtliche algebraische Zerlegung dieses minimalen Falls.

Der zweite Schritt war der Übergang von einer offenen Suche zu einem geschlossenen Kartenfach. Aus $ab-d^2=-1$ folgt $ab=d^2-1$. Die beiden Diagonalzahlen dürfen nicht mehr frei gewählt werden; sie müssen ein **Faktorenpaar** derselben Zahl bilden. Für $d=5$ lautet diese Zahl **24**, und ihre **vier Faktorenpaare** erzeugen **genau vier Karten**. Keine wurde nachträglich ausgewählt, keine zulässige Karte fehlt.

Der dritte Schritt führte zum Zentralpaar. Für jedes ungerade d entsteht es aus den benachbarten Teilern $(d-1)/2$ und $(d+1)/2$; nur bei $d=5$ sind seine beiden Karten zugleich die mittleren Karten einer vierklassigen Schale. Jede ist einzeln vollständig. Gemeinsam verlieren sie genau eine Richtung. Man kann sich dies wie zwei transparente Folien vorstellen: Jede zeigt ein vollständiges Gitter. Werden sie in der richtigen Ausrichtung übereinandergelegt, löschen sich ihre Wirkungen in einer Richtung aus, während die andere erhalten bleibt.

Ein einziger ganzzahliger Wechsel des Koordinatengitters zeigt, dass singuläre Summe, gemeinsame isotrope Linie, Matrizenbüschel und parabolische Scherung nicht vier voneinander unabhängige Geheimnisse sind. Sie stammen aus derselben Normalform. Die vielen Erscheinungen besitzen einen gemeinsamen inneren Mechanismus.

Erst danach wird die **Fünf** ausgezeichnet. Die Arbeit beginnt nicht bei $d=5$ und sammelt dort schöne Eigenschaften. Sie betrachtet zuerst die gesamte Familie und fragt anschließend, welche Bedingungen den Parameter zwingen. Unter den ungeraden Schalen besitzt nur $d=5$ genau vier Klassen. Noch stärker: Schon eine einzige metallische Zentralstimme genügt. Taucht eine mittlere Karte als Potenz einer Fibonacci- oder Pell-Zahlenmaschine auf, muss $d=5$ gelten. An diesem Punkt antwortet die zweite Stimme automatisch.

Der Fünf-Äquivalenzsatz bündelt diese Einsicht. Vierklassigkeit, Metallizität einer beliebigen Zentralstimme, das vollständige Gold-Silber-Paar und die ausgezeichnete pythagoreische Kindrelation sind nicht vier unabhängige Beweise. Sie sind vier Fenster auf dasselbe Haus. Sobald eines geöffnet ist, sind die anderen nicht mehr frei.

Auch die Unterscheidung zwischen vier Karten und zwei Gittertypen gehört zu dieser Reifung. In der ursprünglichen Schreibweise besitzt die Fünf-Schale vier verschiedene Gesichter. Unter einem beliebigen ganzzahligen Basiswechsel bleiben jedoch nur zwei innere Skelettformen. Die Darstellung kann wechseln, während die tiefere Struktur erhalten bleibt.

Der Conway-Hatcher-Topograph setzt diese Unterscheidung in eine klassische Landkarte. Jede Schalenkarte ist eine positive lokale Kantenkonfiguration mit Label $2d$ und Diskriminante 4. Bei $d=5$ liegen E und G auf dem primitiven ungeraden, S und H auf dem imprimitiven geraden Träger. Damit ist die Schale kein neu erfundener Kontinent. Neuheitsfähig wird erst die Grammatik, die auf diesem Sockel Zentralpaar, Normalform, Metallizität und pythagoreische Vererbung gemeinsam ableitet.

Der Euklid-Decoder öffnet danach eine weitere Sprache. Die Matrix enthält das rechtwinklige Dreieck nicht als Bild; sie enthält dessen Eltern. Für die Goldmatrix sind diese Eltern 8 und 3. Euklids Rezept erzeugt daraus 48:55:73. Im Barning-Hall-Baum werden aus den Tripeln schließlich Familienmitglieder mit Eltern, Kindern und Geschwistern. Damit verwandelt sich eine Zahlenliste in eine Genealogie.

Was bedeutet der Befund theoretisch?

Theoretisch ist "Die Grammatik der Fünf" eine Klassifikations-, Normalformen- und Äquivalenzarbeit. Sie klassifiziert eine vollständige endliche Familie, führt mehrere Erscheinungen auf dieselbe Normalform zurück und beweist, dass verschiedene mathematische Sprachen denselben Parameter charakterisieren.

Die eigentliche Leistung liegt in einer Kompression. Teilerarithmetik, quadratische Formen, unimodulare Gitter, Fibonacci- und Pell-Matrizen sowie pythagoreische Genealogie werden nicht nur nebeneinandergestellt. Sie werden durch gerichtete Übergänge verbunden. In diesem präzisen Sinn ist die Fünf ein Übersetzungsfixpunkt – wie ein Bahnhof, an dem mehrere Linien nach unabhängigen Fahrplänen am selben Bahnsteig eintreffen.

Was bedeutet der Befund praktisch?

Ein kleines Computerprogramm kann für jeden Parameter d dieselben Schritte ausführen: d^2-1 faktorisieren, alle Schalenkarten erzeugen, Balance und Zentralpaar bestimmen, die gemeinsame Normalform berechnen, metallische Potenzen testen, pythagoreische Tripel erzeugen und ihre Stammbaumadressen prüfen. Die Theorie ist damit algorithmisch ausführbar.

Noch allgemeiner ist die Arbeit ein **Lehrmodell für verantwortliche Musterforschung**.

Der Weg lautet: auffälliger Treffer → vollständige Familie → Generator → Normalform → Äquivalenzsatz → Audit. Jede spätere Zahl muss ihre Herkunft angeben. Jede zusätzliche Regel kostet Freiheit. Abhängige Folgerungen werden nur einmal gezählt. Kontrollfälle bleiben sichtbar.

Mutige Deutung

Mutig gelesen zeigt das Zentralpaar **eine Form von Einheit, die nicht aus Gleichheit entsteht**. Die beiden Stimmen sind nicht identisch. Sie antworten auf derselben Richtung gegensinnig. Erst in ihrer Gleichmischung verschwindet diese Richtung, während eine zweite erhalten bleibt. Einheit bedeutet hier nicht Gleichheit, sondern präzise Gegenläufigkeit.

Auch Gold und Silber erscheinen nicht als zwei beliebig zusammengebrachte Symbole. Eine einzige metallische Stimme genügt, um die Fünf aufzurufen. Am Fixpunkt antwortet die andere Stimme von selbst. Die Fünf ist damit innerhalb dieser Grammatik **kein** magischer Gegenstand, sondern **ein Ort der Übersetzung**.

Die Deutung endet dort, wo neue Evidenzarten beginnen. Die Mathematik beweist keine historische Bauabsicht, keine altägyptische Kenntnis moderner Matrixsprache, keine reale Raumfrequenz und keine medizinische Wirkung. Raum, Gizeh und Klang dürfen an die Grammatik anschließen; sie dürfen sie jedoch nicht rückwärts beweisen. Auch die weltweite Neuheit der genauen Partitur bleibt bis zur professionellen Datenbankprüfung und externen Begutachtung offen.

Der Fortschritt dieser Arbeit besteht daher nicht darin, immer mehr bemerkenswerte Zahlen gefunden zu haben. Er besteht in der abnehmenden Freiheit. Aus einem Treffer wurde eine Familie, aus der Familie ein Generator, aus dem Generator eine Normalform und aus der Normalform ein Fixpunkt.

Zwischen Vier und Sechs liegt der einzige ungerade Punkt, an dem Teilung, Matrix, Gold, Silber und pythagoreische Vererbung dieselbe Normalform beschreiben.

ANHANG A

Formale Beweise

A.1 · Dreifache Charakterisierung des Minimalfalls

Aus $\det M = -\kappa$ folgen $ab = d^2 - \kappa$ und $\Delta = 4\kappa$. Eine rationale lineare Faktorisierung verlangt $\kappa = s^2$. Dann zerfällt die Form mit den Stimmen $d-s$ und $d+s$.

$$b q_M = ((d-s)x + b y)((d+s)x + b y).$$

Negative Unimodularität bedeutet $\kappa=1$. Innerhalb der rational gespaltenen Fälle ist die kleinste positive Quadratdiskriminante $\Delta=4$ ebenfalls äquivalent zu $s=1$ und $\kappa=1$. Unmittelbare Nachbarn bedeuten $d-s=d-1$ und $d+s=d+1$, also wiederum $s=1$. Jede der drei präzisen Charakterisierungen führt daher einzeln auf $\kappa=1$; rationale Spaltbarkeit allein tut dies nicht.

A.2 · Schalensatz und Konstanten

Aus $ab = d^2 - 1$ folgt die Faktorparametrisierung mit $r=b$. Permanente, Diskriminante und Faktorisierung entstehen durch direktes Einsetzen und Ausmultiplizieren.

A.3 · Balance

Für $a < b$ und $ab = d^2 - 1$ gilt

$$(a+b)^2 = (b-a)^2 + 4(d^2 - 1).$$

Der Abstand $b-a$ kann nicht 1 sein, denn $a(a+1) = d^2 - 1$ würde

$$(2d - 2a - 1)(2d + 2a + 1) = 3$$

erzwingen. Daher $b-a \geq 2$ und $a+b \geq 2d$. Gleichheit verlangt $b-a=2$ und liefert $(a, b) = (d-1, d+1)$.

A.4 · Zentralpaarsatz

Für zwei Klassen M_r und M_s ergibt direkte Rechnung

$$\det(M_r + M_s) = \frac{(d^2 - 1)(r - s)^2 - 4rs}{rs}.$$

Die Nullbedingung ist

$$\frac{s}{r} = \frac{d+1}{d-1}$$

oder der Kehrwert. Für ungerades d ist $\gcd(d-1, d+1) = 2$, sodass unter der kanonischen Schranke genau $r = (d-1)/2$ und $s = (d+1)/2$ bleiben. Für gerades d ist der notwendige größere Faktor bereits zu groß.

A.5 · Simultane Normalform

Die Multiplikationen mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergeben die beiden Normalformen direkt. Addition liefert $\text{diag}(0, d)$. Für den relativen Operator folgt

$$T_d = -L_d^{-1} R_d = \begin{pmatrix} 2d+1 & d \\ -4d & 1-2d \end{pmatrix}$$

und damit $B^{-1}T_d B = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Einträge von $T_d - I$ erzeugen das Ideal (d) .

A.6 · Vierklassen-Fixierung

Ist d ungerade und $|S_d|=4$, dann gilt $\tau(d^2-1)=8$. Schreibe $d^2-1=2^e \cdot m$ mit ungeradem m . Wegen $8|(d^2-1)$ gilt $e \geq 3$. Der Faktor 2^e liefert bereits $e+1$ Beiträge zur Teilerzahl. Da die gesamte Teilerzahl 8 beträgt, muss $e+1$ ein Teiler von 8 und mindestens 4 sein; folglich $e \in \{3, 7\}$. Für $e=7$ bleibt kein ungerader Faktor. Für $e=3$ bleibt im Teilerbudget genau ein ungerader Primfaktor p mit Exponent eins. Somit sind nur $d^2-1=2^7$ oder $d^2-1=2^3p$ möglich.

$$p = \frac{d^2-1}{8}.$$

Für $d=3$ wäre $p=1$ und damit kein Primfaktor; für $d=5$ ist $p=3$. Für $d \equiv 1 \pmod{4}$ zerfällt $p = ((d-1)/4)((d+1)/2)$, für $d \equiv 3 \pmod{4}$ als $((d-1)/2)((d+1)/4)$. Für $d \geq 7$ sind beide Faktoren größer als eins. Es bleibt $d=5$.

A.7 · Einzelstimmen-Metallsatz

Potenzen von C_c erfüllen $a-b=c \cdot d$. Für L_d folgt $d(3-2c)=5$, für R_d folgt $d(2c-3)=5$. Bei ungeradem $d \geq 3$ ist in beiden Fällen nur $d=5$ möglich. Danach sind $c=1$ beziehungsweise $c=2$. Die Offdiagonalfolgen sind streng wachsend bis auf die bekannte Anfangsdublette bei Fibonacci; der Wert 5 bestimmt die Exponenten 5 und 3 eindeutig.

A.8 · Topographische Übersetzung, Parität und Gittertypen

Für $Q_M(x,y)=ax^2+2dxy+by^2$ trägt die ausgezeichnete Topographenkante die benachbarten Regionswerte a, b und die Markierung $h=2d$. Daher gilt $\Delta=h^2-4ab=4$. Bei $d=5$ sind die Koeffizientengehalte $\gcd(a, 10, b)$ für E, G gleich 1 und für S, H gleich 2; dies trennt den primitiven ungeraden vom imprimitiven geraden Träger. Die gezeigten Kanten besitzen zwei positive Nachbarregionen und sind keine Flusskanten.

Bei ungeradem d ist die Form gerade genau dann, wenn a und b gerade sind. Die Zuordnung $(a, b) \mapsto (a/2, b/2)$ ist eine Bijektion zwischen geraden Schalenklassen und Faktorpaaren von $(d^2-1)/4$. Die rank-zwei Klassifikation indefiniter unimodularer Formen liefert die Typen $I_{1,1}$ und U [16, 18]. Für $d=5$ verifizieren die folgenden Transformationen die Zuordnung explizit:

Klasse	T mit $T^T M T$	Zieltyp
E	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$	$I_{1,1}$
G	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$I_{1,1}$
S	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	U
H	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	U

A.9 • Reduktionssatz

Nach Ausklammern von g^2 bleibt das Tripel

$$(2AB, A^2 - B^2, A^2 + B^2).$$

Sind A und B verschiedener Parität, ist dieses Tripel primitiv. Sind beide ungerade, sind alle drei Einträge gerade; nach Division durch 2 ist das Tripel primitiv. Ein weiterer gemeinsamer ungerader Primfaktor würde wegen $\gcd(A, B) = 1$ zu einem Widerspruch führen.

A.10 • Genealogische Fixierung

Die Kindformeln entstehen durch Einsetzen von $m = (d+1)/2$ und $n = (d-1)/2$ in die drei klassischen Paartransformationen. Der Gold-Kindsatz reduziert sich auf die lineare Gleichung

$$2(d-1) = \frac{3d+1}{2}.$$

Der Pell-Kindsatz reduziert sich auf $u = d+2$ zusammen mit $u^2 - 2d^2 = -1$. Beide liefern $d=5$.

ANHANG B

Anwendungsfenster: Raum und Klang

Die reine Grammatik erzeugt Zahlenverhältnisse, die in getrennten Arbeiten als Raum- und Klangmodelle untersucht werden. Dieser Anhang zeigt nur drei Anschlussstellen. Sie sind deklarierte Modell- beziehungsweise Sonifikationsübergänge und keine Beweise des algebraischen Kerns.

B.1 • Drei Leitformeln

$$\text{Raumquantum: } \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 = 165$$

$$\text{Deklariertes Kammerlift: } (k^2, 2d, t, t+1) = (9, 10, 11, 12)$$

$$\text{Newton-Port: } 216 \cdot (63/50)^3 = 432,081216$$

Das Raumquantum 165 stammt aus der Satteldachgeometrie der idealisierten Königinnenkammer [6]. Für die Goldmatrix L_5 sind die Euklid-Eltern $(m, k) = (8, 3)$; daher gilt $d = m - k = 5$. Dies ist keine neue Koinzidenz, sondern dieselbe metallische Diagonalrelation $a - b = c \cdot d$ mit $c = 1$, die im Einzelstimmen-Metallsatz die linke Zentralstimme charakterisiert. Mit $t = m + k = 11$ erzeugt der deklarierte Lift $(k^2, 2d, t, t+1) = (9, 10, 11, 12)$ [3]. Der Newton-Port ist die Sonifikation des ersten Newton-Schritts von $5/4$ zu $63/50$ [4].

Die vollständigen Herleitungen liegen in den zitierten Arbeiten.

Grenze. Keine dieser Formeln beweist eine historische Bauabsicht oder eine reale Raumresonanz. Physikalischer Status entsteht erst durch Maße, Randbedingungen und vorregistrierte Messung.

ANHANG C • Reproduzierbarkeit und Forschungsstatus

C.1 • Reproduktionspaket

Das Paket zu dieser Publikationsfassung kann angefordert werden!

grammatik_der_fuenf_audit_1_0_1.py und _report.json – Autorenaudit mit symbolischen Prüfungen, Topograph-Direktchecks und vollständiger Kleinschalenkonstruktion.

grammatik_der_fuenf_crosscheck_1_0_1.py und _report.json – zweiter projektinterner Codepfad mit SPF-Sieb und eigener Matrixpotenzlogik.

reviewer_R1_spotcheck.py und reviewer_R1_report.json – projektbegleitender KI-Spotcheck von Claude (Anthropic), separat implementiert, aber ohne organisatorische Unabhängigkeit; grammatik_der_fuenf_R1_integration_note_1_0_1.json dokumentiert diese Rolle.

grammatik_der_fuenf_prior_art_1_0_1.json, grammatik_der_fuenf_manifest_1_0_1.json und grammatik_der_fuenf_release_hashes_1_0_1.json – Suchstand, Provenienz und Prüfsummen.

grammatik_der_fuenf_leserexperiment_1_0_1.py und figures_1_0_1/ – minimales Leserexperiment sowie Vektor- und PNG-Quellen der neuen Abbildungen.

Der Autorenaudit umfasst 23 symbolische Kernchecks, die vollständige Konstruktion aller Schalen bis $d=3000$, einen Selektivitätsscan bis $d=100.000$ und direkte Topographenprüfungen $\Delta=(2d)^2-4ab=4$. Der projektinterne Gegencheck und der KI-Spotcheck R1 prüfen Vierklassigkeit bis $d=2.000.000$ und metallische Zentralpotenzen bis $d=5000$ über getrennte Codepfade. R1 dokumentiert Python 3.12.3, SymPy 1.14.0 und 189,901 Sekunden Laufzeit. Alle drei Pfade gehören organisatorisch zum Projekt; eine Drittprüfung unbeteiligter Personen oder Institutionen bleibt offen.

SHA-256 des Autorenaudits 1.0.1:

cb2f1f37cea407eb4ffe6097ceb18140178c590e08c8507d69750c5cf67cec49

SHA-256 des projektinternen Gegenchecks 1.0.1:

6f1154043f06f595cf88586a7867ab149eedcd6d225c637eeecaf6837d05b3c5

SHA-256 des KI-Spotchecks R1:

0d0d2353208bf5e22d568af5928538ebfadfc48a8f2a799282016784cb5b0467

Die Hashes sind Versionsfingerabdrücke. Sie zeigen, auf welche unveränderten Dateien sich die jeweiligen Berichte beziehen; sie ersetzen weder Beweis noch organisatorisch unabhängige Reproduktion.

C.2 · Leserexperiment: die Schale selbst erzeugen

Der folgende Zehnzeiler ist kein Ersatz für den Audit. Er senkt lediglich die Hürde, das Kartenfach für beliebige d selbst zu erzeugen und die Kontrollfälle $d=5$ und $d=7$ zu vergleichen.

```
from math import isqrt

def shell(d: int):
    n = d*d - 1
    return [(n//r, r) for r in range(1, isqrt(n)+1)
            if n % r == 0]
```

```
for d in (5, 7):
    print(d, shell(d))
```

Ausgabe: 5 → [(24,1),(12,2),(8,3),(6,4)]; 7 → [(48,1),(24,2),(16,3),(12,4),(8,6)].

C.3 · Claim-Graph, Satzbrücke und Prior-Art-Status

C01 → C02; C02 → C03/C04/C09/C10; C04 → C05 → C06; C04 → C07
C10 → C11; C03+C10+C11 → C12; C02+C07+C12 → C08

Brücke zwischen Textsätzen und maschinenlesbaren Claims:

Textsatz	Claim	Textsatz	Claim
Hauptsatz A	C01	Hauptsatz B	C02
Hauptsatz C	C03	Hauptsatz D	C04
Hauptsatz E	C05	Korollar E.1	C06
Hauptsatz G	C07	F+G+H gemeinsam	C08
Kapitel 5 / Topograph	C09	Hauptsatz J	C10
Hauptsatz K	C11	Hauptsätze L+M	C12

KI-Spotcheck R1. Claude (Anthropic), projektbegleitender KI-Forschungspartner und Rechenprüfer der Forschungsreihe der BOHN AI Inc., implementierte einen dritten Codepfad, der weder Autorenaudit noch projektinternen Gegencheck verwendet. Das archivierte Skript bestätigt Vierklassigkeit bis $d=2.000.000$, beide metallischen Zentralstimmen bis $d=5000$ und elf Kernidentitäten. Die Implementierung ist getrennt; organisatorische Unabhängigkeit liegt nicht vor. Eine externe Reproduktion durch unbeteiligte Dritte bleibt offen.

Das vollständige Claim Register liegt maschinenlesbar im Begleitpaket. Der Graph ersetzt die frühere lineare Kurzform: Mehrere Claims verzweigen aus dem Schalensatz und laufen erst im Äquivalenzsatz wieder zusammen. Die Kennzeichnungen reichen konsistent von C01 bis C12; abhängige Korollare werden nicht mehrfach gezählt.

Die erweiterte Prior-Art-Suche wurde am 14. Juli 2026 durchgeführt. Sie fand die klassischen Einzelbausteine und zusätzlich die exakte Conway-Hatcher-Topographenübersetzung der Schale. Keine mathematisch äquivalente Gesamtkomposition aus Festlabel-Querschnitt, Zentralpaar-Normalform, Einzelstimmen-Metallsatz, Rohbein-Decoder und doppelter Kindfixierung wurde im gesichteten Material identifiziert. Das Protokoll bleibt ein Suchstand, kein weltweiter Neuheitsbeweis.

ANHANG D

Begriffe und Quellen

D.1 • Kompaktes Glossar

Matrix: rechteckige Zahlenanordnung; hier stets 2×2 und symmetrisch

Determinante: Minusprobe über Kreuz; im Hauptfall gleich -1

Permanente: Plusprobe über Kreuz; in jeder d -Schale gleich $2d^2 - 1$

Schale: vollständige endliche Menge aller zulässigen Karten bei festem d

Singulär: nicht invertierbar; bei einer 2×2 -Matrix vom Rang eins wird die Ebene auf eine Linie abgebildet und mindestens eine unabhängige Richtung geht verloren

Isotrope Richtung: von null verschiedener Vektor w mit $w^T M w = 0$; daraus folgt im Allgemeinen nicht $M w = 0$, daher ist sie nicht automatisch eine Kernrichtung

Basiswechsel: neue ganzzahlige Koordinaten für dasselbe Gitterobjekt

Topograph: klassische Landkarte einer binären quadratischen Form; Regionen tragen Formwerte, Kanten die gemischte Markierung h . Für die Schale gilt $|h| = 2d$ und $\Delta = 4$.

Inhalt einer Form: größter gemeinsamer Teiler der Koeffizienten a , $2d$ und b ; Inhalt 1 heißt primitiv

Fluss: Grenzlinie im Conway-Topographen zwischen Regionen mit positiven und negativen Formwerten; eine Kante mit zwei positiven Nachbarregionen ist keine Flusskante

Träger: der Topograph beziehungsweise ganzzahlige Kongruenztyp, auf dem eine lokale Kantenkonfiguration liegt; keine physische Unterlage

0-hyperbolisch: indefinite Form mit Quadratdiskriminante, die den Wert null repräsentiert; im Topographen erscheinen Nullregionen

Metallische Matrix: Begleitmatrix C_c , deren Potenzen Fibonacci-, Pell- oder verwandte Rekurrenzen erzeugen

Rohtripel: Euklid-Ausgabe vor dem Entfernen gemeinsamer Faktoren

Barning-Hall-Baum: vollständiger Stammbaum primitiver pythagoreischer Tripel

Sonifikation: hörbare Übersetzung einer Zahl; keine physikalische Messbehauptung

D.2 • Literatur und Quellen

- [1] C. Bohn. Die zwei Stimmen der Fünf: Die Königinnenmatrix zwischen Gold und Silber. BOHN AI Inc., Publikationsfassung 1.0, 2026.
- [2] C. Bohn. Die goldene Formel der Königin. BOHN AI Inc., 2026.
- [3] C. Bohn. Der Klang des Stammbaums. BOHN AI Inc., 2026.
- [4] C. Bohn. Der Klang des ersten Schrittes. BOHN AI Inc., 2026.
- [5] C. Bohn. Die Göttliche Universalfrequenz, Teil III: Nullmodell-Stresstest. BOHN AI Inc., 2026.
- [6] C. Bohn. Die Göttliche Universalfrequenz, Teil IV: Königinnenkammer. BOHN AI Inc., 2026.
- [7] C. Bohn. Die Göttliche Universalfrequenz, Teil V: Der Fibonacci-Überlebende. BOHN AI Inc., 2026.
- [8] Euclid. The Thirteen Books of Euclid's Elements. Übers. T. L. Heath. Cambridge University Press, 1908.
- [9] A. F. Horadam. "A Generalized Fibonacci Sequence." American Mathematical Monthly 68(5), 455–459, 1961. DOI 10.1080/00029890.1961.11989696.
- [10] H. W. Gould. "A History of the Fibonacci Q-Matrix and a Higher-Dimensional Problem." Fibonacci Quarterly 19(3), 250–257, 1981. DOI 10.1080/00150517.1981.12430088.
- [11] G. Cerda. "Matrix Methods in Horadam Sequences." Boletín de Matemáticas 19(2), 97–106, 2012.
- [12] B. W. King; F. D. Parker. "A Fibonacci Matrix and the Permanent Function." Fibonacci Quarterly 7(5), 539–544, 1969. DOI 10.1080/00150517.1969.12431139.
- [13] M. A. Alekseyev. "On the Intersections of Fibonacci, Pell, and Lucas Numbers." INTEGERS 11, 239–259, 2011. DOI 10.1515/integ.2011.021.
- [14] F. J. M. Barning. Over pythagorese en bijna-pythagorese driehoeken en een generatieproces met behulp van unimodulaire matrices. Stichting Mathematisch Centrum, ZW-011, 1963.
- [15] A. Hall. "Genealogy of Pythagorean Triads." Mathematical Gazette 54(390), 377–379, 1970. DOI 10.2307/3613860.
- [16] D. A. Buell. Binary Quadratic Forms: Classical Theory and Modern Computations. Springer, 1989. DOI 10.1007/978-1-4612-4542-1.
- [17] H. W. Lenstra Jr. "Solving the Pell Equation." In Algorithmic Number Theory, MSRI Publications 44, 2008.

- [18] J. Milnor; D. Husemoller. Symmetric Bilinear Forms. Springer, 1973. DOI 10.1007/978-3-642-88330-9.
- [19] R. Saunders; T. Randall. “The Family Tree of the Pythagorean Triplets Revisited.” Mathematical Gazette 78(482), 190–193, 1994. DOI 10.2307/3618576.
- [20] D. W. Mitchell. “An Alternative Characterisation of All Primitive Pythagorean Triples.” Mathematical Gazette 85(503), 273–275, 2001. DOI 10.2307/3622017.
- [21] ISO 3382-1:2009 und ISO 3382-2:2008. Acoustics — Measurement of room acoustic parameters.
- [22] J. H. Conway. The Sensual (Quadratic) Form. Carus Mathematical Monographs 26, Mathematical Association of America, 1997.
- [23] A. Hatcher. Topology of Numbers. American Mathematical Society, 2022.
- [24] C. O’Sullivan. “Topographs for Binary Quadratic Forms and Class Numbers.” Mathematika 71(4), e70042, 2025. DOI 10.1112/mtk.70042; arXiv:2408.14405.
- [25] OEIS Foundation Inc. A002315, NSW numbers. Zugriff: 14. Juli 2026.
- [26] OEIS Foundation. A001653, “Numbers k such that $2 \cdot k^2 - 1$ is a square”; Schalenparameter 1,5,29,169,... Zugriff 14. Juli 2026.
- [27] OEIS Foundation Inc. A000129, Pell-Zahlen. Zugriff: 14. Juli 2026.